# Ueber Kurven vierter Ordnung mit singulären Punkten im Zusammenhang mit dem Connex erster Ordnung und zweiter Klasse.

---

# Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

(Sektion II)

der

**K. Bayer. Ludwig-Maximilians-Universität München**

vorgelegt von

**Julius Scheckenbach**

aus Würzburg.

Eingereicht am 27. Juli 1911.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Bonn 1913.

Foppen'sche Buchdruckerei.

Referent:
Geheimrat Professor Dr. F. Lindemann.

# Inhalt.

I.

Einleitung. Der Connex m. Ordnung und n. Klasse 5.

II.

Der Connex 1. Ordnung und 2. Klasse. . . 6.
§ 1. Die Grundstrahlen des Connxes (1,2). . 6.
§ 2. Beziehung des Connexes (1,2) auf drei Grundstrahlen. 8.
§ 3. Ableitung der Gleichungen mehrerer mit dem Connex (1,2) zusammenhängenden Kurven. . . . . 10.

III.

Die Kurven vierter Ordnung. . . . . 16.
§ 4. Die allgemeine Kurve F=o. . . 16.
§ 5. Die Kurve $F_{3,0}$=o. . . . . 18.
§ 6. Die Kurve $F_{2,0}$=o. . . . . 25.
§ 7. Die Kurve $F_{1,0}$=o . . . . 29.
§ 8. Gruppierung der Doppeltangenten der Kurven $F_{3,0}$=o, $F_{2,0}$=o, $F_{1,0}$=o. . . 30.
§ 9. Das Auftreten von Spitzen. . . 35.
§ 10. Die Kurven $F_{0,3}$=o, $F_{1,2}$=o, $F_{2,1}$=o. . 36.
§ 11. Die Kurven $F_{0,2}$=o, und $F_{1,1}$=o. . 46.
§ 12. Die Kurve $F_{0,1}$=o. . . . . 49.

IV.

Die Kurven Uv. . . . . 51.
§ 13. Allgemeines. . . . . 51.
§ 14. Die Kurven $U_v$ bei Kurven 4. O. mit Doppelpunkten . . . . . 55.
§ 15. Die Kurven $U_v$ bei Kurven 4. O. mit Spitzen oder mitDoppelpunkten und Spitzen. 60.

V.

Die vierfach berührenden Kegelschnitte. . . 63.
§ 16. Allgemeines. . . . . 63.
§ 17. Die Systeme der allgemeinen Kurve 4. O. in symbolischer Darstellung. 66.
§ 18. Die Systeme der Kurven 4. O. mit Doppelpunkten. . . . . 68.
§ 19. Die Systeme der Kurven 4. O. mit Spitzen sowie der Kurven mit Doppelpunkten und Spitzen. . . . . 71.
§ 20. Die allgemeine Formel. . . . 74.

## Einschlägige Literatur.


Ameseder: Abhandlung Bd. 37 d. Sitzungsber. der Akad. d. Wissensch. zu Wien.

Andoyer: Abhandlung Annales de la Faculté de Toulouse 1889.

Bretschneider: Dissertation über Kurven 4. O. mit drei Doppelpunkten 1875.

Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie, 1876.

Fontené: Abhandlung Bulletin de la Société mathem. de France t. 27, 1899. (Sur les dégénérescences des 63 systèmes.)

Fontené: Abhandlung Bulletin de la Société mathem. de France, 1899. (Décomposition d'une correspondance tangentielle.)

Godt: Dissertation über den Connex 1. O. und 2. Kl., 1873.

Gundelfinger: Abhandlung über die Ausartungen einer Kurve 3. O., Math. Ann. Bd. IV.

Hesse: Abhandlungen über Kurven 4. O., Crellesches Journal Bd. 49.

Humbert: Abhandlung Journal de Liouville 1886 (Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébraiques.)



Vorliegende Arbeit entstand unter Leitung des Herrn Geheimrats Professors Dr. Ferdinand Lindemann an der Universität München.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer für das meinen Studien entgegengebrachte Interesse und für die stets hilfsbereite Führung meinen ergebensten Dank auszusprechen.

# I. Einleitung.

Das geometrische Gebilde der Ebene, welches durch eine Gleichung zwischen den unter dem Namen Koordinaten bekannten Grössen analytisch dargestellt wird, heisst man Kurve, und jenachdem man diese Grössen als Punkt- oder als Linienkoordinaten ansieht, nimmt man entweder nur den Punkt oder nur den Strahl als erzeugendes Element der Kurve an. Lässt man nun aber in einer Gleichung beide Arrten von Koordinaten gleichzeitig auftreten, so ist dadurch ein neues geometrisches Gebilde definiert, welches man als Connex bezeichnet hat. Hier treten Punkt oder Strahl nicht mehr selbständig auf, sondern erst die Verbindung von Punkt und Strahl gilt als Bestandteil des Gebildes. Daher bezeichnet man die Combination von Punkt und Strahl als Element des Connexes.

Benützt man homogene Koordinaten und die symbolische Darstellung, so hat man für den allgemeinen Connex die Gleichung:

$$a_x^m \; u_\alpha^n = 0, \qquad 1)$$

in welcher die Punktkoordinaten x im m. Grade, die Linienkoordinaten u im n. Grade x enthalten sind, wobei $a_x$ als Abkürzung für $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ und $u_\alpha$ als Abkürzung für $u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + u_3\alpha_3$ gebraucht werden. Dieser Connex ist als Connex m. Ordnung und n. Klasse (Connex (m,n)) bekannt und von Lindemann ausführlich diskutiert.

Die Gleichung 1) des Connexes (m,n) scheidet aus der vierfach unendlichen Anzahl von „Elementen" der Ebene eine dreifache Mannigfaltigkeit von Elementen aus. Unter diesen befindet sich noch eine doppelt unendliche

Anzahl von Elementen, welche neben der Connexgleichung 1) auch der Gleichung

$$u_x = 0, \qquad 2)$$

genügen. Die Gesamtheit der den Gleichungen 1) und 2) genügenden Elemente bezeichnet man als Hauptcoincidenz des Connexes (m, n). Wie Gleichung 1) lehrt, umhüllen die Geraden, welche mit einem gegebenen Punkte x Elemente des Connexes (m, n) bilden, eine Kurve n. Klasse $K_n$; die Punkte, welche mit einer gegebenen Geraden u Elemente des Connexes bilden, liegen auf einer Kurve m. Ordnung $C_m$. In der durch die Gleichungen 1) und 2) bestimmten Hauptcoincidenz bilden daher Elemente:

1. Jeder Punkt mit n bestimmten durch ihn gehenden Strahlen, den n Coincidenzstrahlen des Punktes. Es sind dies die von dem Punkte an seine zugehörige $K_n$ möglichen Tangenten.
2. Jeder Strahl mit m bestimmten auf ihm liegenden Punkten, den m Coincidenzpunkten des Strahls. Es sind dies die Schnittpunkte des Strahles mit seiner zugehörigen $C_m$.

# II. Der Connex 1. Ordnung u. 2. Klasse.

## § 1.

### Die Grundstrahlen des Connexes (1, 2)

Setzt man in der Connexgleichung 1) $m = 1$, $n = 2$, so ergibt sich der Connex 1. Ordnung und 2. Klasse mit der Gleichung

$$a_x u_\alpha^2 = 0, \qquad 3)$$

Als Elemente der durch die Gleichungen 2) und 3) bestimmten Hauptcoincidenz des Connexes (1, 2) hat man also zu betrachten:

1. Jeden Punkt und einen Strahl des durch ihn gehenden Paares von Coincidenzstrahlen.
2. Jeden Strahl und seinen auf ihm liegenden Coincidenzpunkt.

Wir wollen die Connexgleichung vorübergehend in der Form

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0, \qquad 4)$$

schreiben, wo die $A_i$ Funktionen 2. Klasse der $u_i$ sind. Für eine Gerade u besteht die Gleichung

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \qquad 5)$$

für eine Gerade v, welche durch einen beliebig auf u gelegenen Punkt x geht, die Gleichung

$$v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0. \qquad 6)$$

Für den Punkt x bestehen die Gleichungen 5) und 6) gleichzeitig, woraus man findet:

$$x_1 = \rho\,(u_2v_3 - u_3v_2) = \rho.\,(uv)_1,$$
$$x_2 = \rho\,(u_3v_1 - u_2v_3) = \rho.\,(uv)_2,$$
$$x_3 = \rho\,(u_1v_2 - u_2v_1) = \rho.\,(uv)_3,$$

wenn $\rho$ Proportionalitätsfaktor ist. Verlangt man nun, dass x mit u ein Element der Hauptcoincidenz des Connexes bilde, so muss die Gleichung 4) erfüllt sein, wenn man an Stelle der $x_i$ die $u_i$ einsetzt.

Man hat dann:

$$A_1\,(uv)_1 + A_2\,(uv)_2 + A_3\,(uv)_3 = 0$$

oder nach den v geordnet:

$$v_1(A_2u_3 - A_3u_2) + v_2(A_3u_1 - A_1u_3) + v_3(A_1u_2 - A_2u_1) = 0.$$

Wenn aber jeder Punkt x auf u mit u ein Element der Hauptcoincidenz bilden soll, dann muss Gleichung 7) unabhängig von den v erfüllt sein, d.h. es müssen die Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} A_2u_3 - A_3u_2 &= 0,\\ A_3u_1 - A_1u_3 &= 0,\\ A_1u_2 - A_2u_1 &= 0, \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

Die beiden ersten Gleichungen des Systems 8) haben 9 gemeinsame Lösungen, darunter befinden sich aber die beiden Lösungen, welche $u_3 = 0$ und $A_3 = 0$ gemeinsam sind und für welche die dritte Gleichung von 8) nicht erfüllt ist. Man hat daher sieben Lösungen, welche alle drei Gleichungen des Systems 8) befriedigen oder mit anderen Worten: Es gibt sieben Strahlen in der Ebene von der Art, dass jeder mit jedem seiner Punkte ein Element der Hauptcoincidenz bildet. Wir nennen sie Grundstrahlen des Connexes (1,2) oder seiner Hauptcoincidenz.

## § 2.

### Beziehung des Connexes (1,2) auf drei Grundstrahlen.

Die Gleichung unseres Connexes, $a_x u_\alpha^2 = 0$, ist in aufgelöster Form:

$$a_1 x_1 [u_1 \alpha_1^2 + u_2 \alpha_2^2 + u_3 \alpha_3^2 + 2u_1 u_2 \alpha_1 \alpha_2 + 2u_1 u_3 \alpha_1 \alpha_3 + 2u_2 u_3 \alpha_2 \alpha_3]$$
$$+ a_2 x_2 [u_1 \alpha_1^2 + \ldots \quad ]$$
$$+ a_3 x_3 [u_1 \alpha_1^2 + \ldots \quad ] = 0$$

Wie ändert sich diese Gleichung, wenn man ein neues Fundamentaldreieck einführt, dessen Seiten von dreien der sieben Grundstrahlen gebildet werden? Sei zunächst nur die Seite $x_1 = 0$ Grundstrahl, dann muss obige Gleichung für $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $x_1 = 0$ identisch erfüllt sein. Das ist nur möglich, wenn die Glieder $a_2 x_2 u^2_1 \alpha^2_1$ und $a_3 x_3 u^2_1 \alpha^2_1$ in der Gleichung fehlen. Führt man nun einen weiteren Grundstrahl als Seite $x_2 = 0$ und schliesslich einen 3. Grundstrahl als Seite $x_3 = 0$ ein, so muss die auf drei Grundstrahlen bezogene Connexgleichung identisch erfüllt sein für jedes der drei Systeme

$$\left.\begin{array}{l} u_2 = 0,\ u_3 = 0,\ x_1 = 0, \\ u_3 = 0,\ u_1 = 0,\ x_2 = 0, \\ u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ x_3 = 0, \end{array}\right\}$$ d. h. die neue Gleichung ist:

$$a_1 x_1 [u_1 \alpha^2_1 + 2 u_1 u_2 \alpha_1 \alpha_2 + 2 u_1 u_3 \alpha_1 \alpha_3 + 2 u_2 u_3 \alpha_2 \alpha_3]$$
$$+ a_2 x_2 [u_2 \alpha_2^2 + 2 u_1 u_2 \alpha_1 \alpha_2 + 2 u_1 u_3 \alpha_1 \alpha_3 + 2 u_2 u_3 \alpha_2 \alpha_3]$$
$$+ a_3 x_3 [u_3 \alpha_3^2 + 2 u_1 u_2 \alpha_1 \alpha_2 + 2 u_1 u_3 \alpha_1 \alpha_3 + 2 u_2 u_3 \alpha_2 \alpha_3] = 0.$$

Die Hauptcoincidenz bleibt die nämliche, wenn man zu der eben abgeleiteten Connexgleichung $u_x = 0$ mit einem Faktor multipliziert hinzufügt. Subtrahiert man daher

$$(a_1 \alpha^2_1 u_1 + a_2 \alpha_2^2 u_2 + a_3 \alpha_3^2 u_3)\ u_x = 0,$$

so erhält man schliesslich, wenn man nach Produkten der $u_i$ ordnet, als Gleichung eines neuen Connexes (1,2):

$$u_2 u_3 [2 a_1 \alpha_2 \alpha_3 x_1 + (2 a_2 \alpha_2 \alpha_3 - a_3 \alpha_3^2) x_2 + (2 a_3 \alpha_2 \alpha_3 - a_2 \alpha_2^2) x_3]$$
$$+ u_3 u_1 [(2 a_1 \alpha_3 \alpha_1 - a_3 \alpha_3^2) x_1 + 2 a_2 \alpha_3 \alpha_1 x_2 + (2 a_3 \alpha_3 \alpha_1 - a_1 \alpha^2_1) x_3]$$
$$+ u_1 u_2 [(2 a_1 \alpha_1 \alpha_2 - a_2 \alpha_2^2) x_1 + (2 a_2 \alpha_1 \alpha_2 - a_1 \alpha^2) x_2 + 2 a_3 \alpha_1 \alpha_2 x_3] = 0.$$

In dieser Gleichung haben weder die $a_i$ noch die $\alpha_i$ für sich eine Bedeutung, sondern erst jedes Produkt $a_{h\,i\,k}\ \alpha_h \alpha_i \alpha_k$ stellt einen bestimmten Coëffizienten dar. Da in den folgenden Untersuchungen die Symmetrie der Bezeichnungsweise jedoch vielfach verloren geht, so muss auf die Verwendung von Symbolen in der Folge verzichtet werden, und obige Connexgleichung lautet dann in anderer Form

$$a_x u_2 u_3 + b_x u_3 u_1 + c_x u_1 u_2 = 0,$$

wo jetzt die $a_x$, $b_x$, $c_x$, drei nichtsymbolische lineare Ausdrücke sind.

Der so gefundene Connex hat die gleiche Haupt-

coincidenz wie der ursprünglich gegebene, und man sieht ein, dass die Hauptcoincidenz eines allgemeinen Connexes (1,2) immer als Hauptcoincidenz eines Connexes von der Form $a_x u_2 u_3 + b_x u_3 u_1 + c_x u_1 u_2 = 0$, dessen Gleichung auf drei Grundstrahlen bezogen ist, dargestellt werden kann. Da man die sieben Grundstrahlen auf 35 fache Weise zu je dreien zusammennehmen kann, gibt es 35 solche Connexe.

## § 3.

### Ableitung der Gleichungen mehrerer mit dem Connex (1,2) zusammenhängenden Kurven:

Für ein festgewähltes x stellt die Connexgleichung

$$a_x\ u_2\ u_3 + b_x\ u_3\ u_1 + c_x\ u_1\ u_2 = 0$$

eine Kurve zweiter Klasse dar, was wir so ausdrücken, dass wir sagen: Jedem Punkte x entspricht ein Kegelschnitt. Die Gesamtheit aller Connexkegelschnitte bildet ein Gewebe von Kegelschnitten. Man sieht leicht ein, dass die Connexgleichung für jedes der drei Wertepaare

$$u_2 = 0,\ u_3 = 0$$
$$u_3 = 0,\ u_1 = 0$$
$$u_1 = 0,\ u_2 = 0$$

erfüllt wird. Das bedeutet aber, dass alle Kegelschnitte des Gewebes die drei Fundamentalseiten berühren und dass daher die drei Fundamentalseiten mit jedem Punkte der Ebene Elemente des Connexes bilden.

Wenn die beiden Coincidenzstrahlen des Punktes x, d.h. also die beiden von x an seinen zugehörigen Connexkegelschnitt gehenden Tangenten in einen Doppelstrahl zusammenfallen, so rückt x auf den Kegelschnitt, und es entsteht die Frage: Welche Kurve erfüllen alle Punkte x, welche auf ihrem zugehörigen Connexkegelschnitte liegen? Man erhält die Gleichung des zu einem

festen Punkte x′ gehörenden Connexkegelschnittes in Punktkoordinaten, wenn man die Discriminante der Linienkoordinatengleichung mit $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ ränderl. Wird der festgewählte Punkt x′ variabel, so hat man $x_i$ an Stelle von $x'_i$ zu setzen und erhält daher als Gleichung der fraglichen Kurve:

$$F \equiv \begin{vmatrix} 0 & c_x & b_x & x_1 \\ c_x & 0 & a_x & x_2 \\ b_x & a_x & 0 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad 1)$$

Es ist ferner von Interesse anzugeben, wo alle jene Punkte x liegen, deren zugehörige Connexkegelschnitte in Punktepaare zerfallen. Soll ein Kegelschnitt

$$a_x u_2 u_3 + b_x u_3 u_1 + c_x u_1 u_2 = 0$$

in ein Punktepaar zerfallen, so müssen gleichzeitig die drei Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} b_x u_3 + c_x u_2 &= 0 \\ c_x u_1 + a_x u_3 &= 0 \\ a_x u_2 + b_x u_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Den Ort aller Punkte x, deren Connexkegelschnitte zerfallen, erhält man durch Elimination der u aus den Gleichungen 2). Heisst man ihn P, so ist also

$$P \equiv \begin{vmatrix} 0 & c_x & b_x \\ c_x & 0 & a_x \\ b_x & a_x & 0 \end{vmatrix} \equiv 2\, a_x b_x c_x = 0. \qquad 3)$$

Die Kurve P = 0 ist von der dritten Ordnung und besteht aus den drei Geraden $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$.

Betrachtet man die Verbindungslinie u der beiden Punkte des zerfallenen Connexkegelschnitts als Doppeltangente des Kegelschnitts, so bilden die Gleichungen 2) die Bedingung dafür, dass u Doppeltangente des zu x gehörigen Kegelschnitts ist. Die Enveloppe aller Doppeltangenten zerfallener Kegelschnitte erhält man durch Eli-

mination der x aus den Gleichungen 2). Nennt man sie C, so kommt:

$$C \equiv \begin{vmatrix} c_1 u_2 + b_1 u_3 & c_2 u_2 + b_2 u_3 & c_3 u_2 + b_3 u_3 \\ c_1 u_1 + a_1 u_3 & c_2 u_1 + a_2 u_3 & c_3 u_1 + a_3 u_3 \\ b_1 u_1 + a_1 u_2 & b_2 u_1 + a_2 u_2 & b_3 u_1 + a_3 u_2 \end{vmatrix} = 0. \quad 4)$$

Daraus ergibt sich:

$$C \equiv 2\,(a\,b\,c)\; u_1\; u_2\; u_3 = 0.$$

Die Enveloppe aller Doppeltangenten zerfallener Connexkegelschnitte ist also eine Kurve dritter Klasse. Sie besteht aus den drei Büscheln $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, d.h. die Doppeltangenten der zerfallenen Connexkegelschnitte sind alle durch die Ecken des Fundamentaldreiecks gehenden Strahlen.

Schliesslich ist noch die Kurve anzugeben, auf welcher alle Punktepaare der zerfallenen Connexkegelschnitte liegen. Sind y und z die beiden Punkte eines zerfallenen Connexkegelschnitts, so ist

$$u_y \,.\, u_z = 0$$

die Gleichung dieses Kegelschnitts. Soll anderseits die Gleichung

$$a_x\, u_2\, u_3 + b_x\, u_3\, u_1 + c_x\, u_1\, u_2 = 0$$

für ein bestimmtes x den nämlichen zerfallenen Kegelschnitt darstellen, so hat man

$$a_x\, u_2\, u_3 + b_x\, u_3\, u_1 + c_x\, u_1\, u_2 = u_y\, u_z,$$

in welcher Gleichung die Coëffizienten der entsprechenden Quadrate und Produkte der u auf beiden Seiten gleich sein müssen. Auf diese Weise findet man:

$$\begin{array}{l|l} a_x = y_2\, z_3 + y_3\, z_2, & y_1\, z_1 = 0, \\ b_x = y_3\, z_1 + y_1\, z_3, & y_2\, z_2 = 0, \\ c_x = y_1\, z_2 + y_2\, z_1, & y_3\, z_3 = 0, \end{array}$$

Bezüglich der x und y sind dies sechs lineare Gleichungen, aus welchen sich die x und y wie sechs Unbekannte eliminieren lassen. Als Eliminationsresultat ergibt sich die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & a_2 & a_3 & o & z_2 & z_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & z_3 & o & z_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & z_2 & z_1 & o \\ o & o & o & z_1 & o & o \\ o & o & o & o & z_2 & o \\ o & o & o & o & o & z_3 \end{vmatrix} = o.$$

Heisst man sie H, so erhält man

$$H \equiv (abc)\ z_1\ z_2\ z_3 = o,$$

oder, wenn man x an Stelle von z schreibt,

$$H \equiv abc)\ x_1\ x_2\ x_3 = o, \qquad 5)$$

woraus folgt:

Der Ort aller Punktepaare zerfallener Connexkegelschnitte ist eine Kurve dritter Ordnung, welche in die drei Seiten des Fundamentaldreiecks zerfällt. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich sogleich der Satz: Der Schnittpunkt irgend zweier Seiten des Fundamentaldreiecks bildet mit jedem Punkte der dritten Dreiecksseite das Punktepaar eines zerfallenen Connexkegelschnitts.

Mit der oben erwähnten Kurve $F = o$ stehen nun zwei Kurvensysteme im innigsten Zusammenhang, die sogleich eingeführt werden sollen. Die Hauptcoincidenz war festgelegt durch die beiden Gleichungen:

$$a_x\ u_2\ u_3 + b_x\ u_3\ u_1 + c_x\ u_1\ u_2 = o, \qquad 6)$$

$$u_x = o. \qquad 7)$$

Nun entsteht die Frage: Welche Kurve beschreibt der dem Strahl u in der Hauptcoincidenz entsprechende Punkt x, wenn sich u um einen festen Punkt y dreht? Wenn sich u um y drehen soll, so muss u beständig die Gleichung

$$u_y = o \qquad 8)$$

erfüllen. Aus den Gleichungen 7) und 8) ergibt sich dann für die u:

$$u_i = (xy)_i.$$

Setzt man diese Werte der u in die Connexgleichung ein, so erhält man für die zum festen Punkt y gehörige Kurve eine Gleichung vom dritten Grade in den x, die mit $Xy = o$ bezeichnet sei. Man kann diese Kurve dritter Ordnung auch so definieren, dass man sagt: Die Kurve $Xy = o$ ist der geometrische Ort aller jener Punkte x, welche durch ihre Verbindungslinien u mit einem festen Punkte y zu Elementen der Hauptcoincidenz ergänzt werden.

Der Punkt y ist Doppelpunkt von $Xy = o$; denn lässt man u um y sich drehen, so wandert x auf u, wobei x zweimal nach y hineinfällt, nämlich dann, wenn der sich drehende Strahl u mit einem Coincidenzstrahl des Punktes y zusammenfällt. Die beiden Coincidenzstrahlen sind dann Verbindungslinien unendlich benachbarter Punkte, also die Tangenten der Kurve im Doppelpunkte y.

In dualer Weise lässt sich untersuchen, welche Kurve das dem Punkte x in der Hauptcoincidenz zugehörige Strahlenpaar umhüllt, wenn sich x auf einer festen Geraden v bewegt. Analog dem Obigen ergibt sich aus den Gleichungen $u_x = o$ und $v_x = o$ für die x:

$$x_i = (uv)_i.$$

Setzt man diese Werte der x in die Connexgleichung ein, so erhält man für die zum festen Strahl v gehörige Kurve eine Gleichung vom dritten Grade in den u, die mit $U_v = o$ bezeichnet sei. Dann kann diese Kurve dritter Klasse auch so definiert werden, dass man sagt: Die Kurve $U_v =$ ist die Enveloppe aller jener Strahlen u, welche durch ihre Schnittpunkte mit einem festen Strahl v zu Elementen der Hauptcoincidenz ergänzt werden.

Mit Hilfe der zuletzt genannten Kurve $U_v = o$

gelingt es nun auch die Enveloppe $\Phi = 0$ aller Doppelstrahlen der Hauptcoincidenz aufzustellen, d. h. jener Strahlen, welche dadurch entstehen, dass die beiden Tangenten von einem Punkte an den ihm entsprechenden Connexkegelschnitt zusammenfallen. Zunächst ist ersichtlich, dass die Kurve $U_v = 0$ den Strahl v selbst zur Tangente hat. Denn setzt man in der aus der Connexgleichung abgeleiteten Gleichung $U_v = 0$ die $u_i$ gleich $v_i$, so verschwinden die $x_i$ und die Gleichung $U_v =$ ist identisch erfüllt. Von jedem Punkte von v kann man ausser v noch zwei weitere Tangenten an die zugehörige $U_v = 0$ legen, nämlich die zwei zu dem betreffenden Punkte gehörigen Strahlen der Hauptcoincidenz, und für den Berührungspunkt von v mit $U_v = 0$ fällt der eine seiner beiden Coincidenzstrahlen mit v zusammen. Das sagt aber aus, dass der Berührungspunkt von v mit $U_v = 0$ der zu v in der Hauptcoincidenz gehörige Punkt ist. Soll nun v Tangente der gesuchten Kurve $\Phi = 0$ sein, so muss der zu v gehörige Coincidenzpunkt auf der Kurve $F = 0$ liegen und auch der zweite der beiden oben genannten Coincidenzstrahlen mit v zusammenfallen, d. h. also: v wird Rückkehrtangente von $U_v = 0$. Die analytische Bedingung dafür ist aber, dass v auch Tangente der Hesse'schen Kurve von $U_v = 0$ sei. Die gesuchte Kurve von $\Phi = 0$ wird demnach gefunden, wenn man in der Hesse'schen Kurve von $U_v = 0$ u an Stelle von v einsetzt. Die Kurve wird dann vom sechsten Grade in den u, die Enveloppe aller Doppelstrahlen ist also eine Kurve sechster Klasse $\Phi = 0$.

# III. Die Kurven 4. Ordnung.

## § 4.

### Die allgemeine Kurve $F = 0$.

Als Ort aller Punkte, deren beide Coincidenzstrahlen in einen Doppelstrahl zusammenfallen, fanden wir die Kurve

$$F \equiv \begin{vmatrix} 0 & c_x & b_x & x_1 \\ c_x & 0 & a_x & x_2 \\ b_x & a_x & 0 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Kurve ist von der 4. Ordnung und besitzt im allgemeinen keine Singularitäten.

Eine beliebige $Xy = 0$ hat mit $F = 0$ 12 Schnittpunkte gemein. Verbindet man diese 12 Schnittpunkte mit dem Punkte y der Kurve $Xy = 0$, so ist jeder Verbindungsstrahl Coincidenzstrahl des bezüglichen Schnittpunktes der beiden Kurven, da letzterer der Kurve $Xy = 0$ angehört. Weil nun aber dieser Schnittpunkt auch auf $F = 0$ liegt, so sind in dem Verbindungsstrahl ein Paar zusammenfallender Coincidenzstrahlen vereinigt, der Strahl ist also auch Tangente der Kurve sechster Klasse $\Phi = 0$. Da von y an $\Phi = 0$ aber höchstens sechs Tangenten möglich sind, so müssen von den 12 Verbindungsstrahlen immer je zwei zusammenfallen. Dann müssen sich aber auch von den 12 Schnittpunkten sechsmal je zwei vereinigen, da eine durch y gehende Gerade die Kurve 3. Ordnung $Xy = 0$ nur mehr in einem Punkte schneiden kann. Eine Kurve $X_y = 0$ berührt also die Kurve $F = 0$ in sechs Punkten und hat sonst keinen weiteren Punkt mit ihr gemein.

Einem Grundstrahl g entsprechen in der Hauptcoincidenz alle seine Punkte nach der Definition des Grundstrahls. Nimmt man y auf g an, so muss also g Be

standteil der zu y gehörigen Kurve $X_y = 0$ sein, d. h. $X_y = 0$ zerfällt in den Grundstrahl g und einen Kegelschnitt. Da dieser Kegelschnitt die Kurve $F = 0$ nur in vier Punkten berühren kann, so enthält g die beiden andern Berührungspunkte von $X_y = 0$ mit $F = 0$, und dies gilt für jeden Grundstrahl. Die sieben Grundstrahlen sind also Doppeltangenten der Kurve $F = 0$. Legt man den Punkt y in den Schnitt zweier Grundstrahlen g und g', so zerfällt die zugehörige Kurve $X_y = 0$ in die beiden Grundstrahlen g und g', und in eine dritte Gerade. Diese ist ebenfalls Doppeltangente von $F = 0$, doch wird sie im allgemeinen keiner der übrigen Grundstrahlen sein. Denn da auf diese Weise jedem Schnittpunkte zweier Grundstrahlen eine bestimmte Doppeltangente zugehört, so erhält man dadurch weitere $\frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$ Doppeltangenten, welche mit den sieben Grundstrahlen zusammen sämtliche Doppeltangenten der Kurve 4. Ordnung ergeben.

In jeder Ecke des Koordinatendreiecks schneiden sich zwei Grundstrahlen unseres auf die Grundstrahlen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ bezogenen Connexes. Welche Kurve $X_y = 0$ entspricht etwa der Ecke 1? Wir wollen die Kurvengleichung wirklich aufstellen. Für die Ecke 1 hat man die Koordinaten $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$. Wie oben gezeigt wurde, sind die Werte $u_i = (xy)_i$ in die Connexgleichung einzusetzen. Für unseren Fall ist $u_1 = 0$, $u_2 = x_3$, $u_3 = -x_2$, also $X_y \equiv -a_x x_2 x_3 = 0$. Die durch die beiden Dreiecksseiten bestimmte Doppeltangente von von $F = 0$ ist daher $a_x = 0$, und man sieht ohne weiteres, dass auch die beiden anderen in der Connexgleichung enthaltenen Formen $b_x$ und $c_x$ gleich Null gesetzt Doppeltangenten von $F = 0$ bedeuten, die zu den Ecken 2 und 3 des Fundamentaldreiecks gehören.

## § 5.

### Die Kurve $F_{3,0} = 0$.

Es ist von Interesse zu untersuchen, welchen Bedingungen die Coëffizienten unserer Connexgleichung

$$a_x\, u_2\, u_3 + b_x\, u_3\, u_1 + c_x\, u_1\, u_2 = 0$$

zu unterwerfen sind, wenn die Kurve $F = 0$ einen oder mehrere singuläre Punkte bekommen soll.

Die Entwicklung der Determinante in § 4 ergibt

$$F \equiv a_x^2\, x_1 + b_x^2\, x_2^2 + c_x^2\, x_3^2 \qquad 1)$$
$$- 2\, a_x\, b_x\, x_1\, x_2 - 2\, b_x\, c_x\, x_2\, x_3 - 2 c_x\, a_x\, x_3\, x_2 = 0.$$

Soll die Kurve die Ecke 1 des Koordinatendreiecks zum Doppelpunkt haben, so müssen in der Kurvengleichung 1) die Glieder mit $x_1^4$, $x_1^3 x_2$, $x_1^3 x_3$ verschwinden. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist das $a_1 = 0$ ist. Analog muss für einen Doppelpunkt in 2 bezw. 3 $b_2 = 0$ bezw. $c_3 = 0$ werden.

Es sei mit $f_{\delta,\varkappa} = 0$ die Gleichung eines Connexes bezeichnet, dem eine Kurve 4 Ordnung $F = 0$ mit $\delta$ Doppelpunkten und $\varkappa$ Spitzen zugehört. Die Gleichung eines Connexes, der eine Kurve $F_{3,0} = 0$ mit drei Doppunkten bestimmt, ist nach dem Vorigen leicht anzugeben. Indem man die Bedingungen $a_1 = 0$, $b_2 = 0$, $c_3 = 0$ für die Connexgleichung berücksichtigt, bekommt man:

$$f_{3,0} \equiv (a_2\, x_2 + a_3\, x_3)\, u_2\, u_3 + (b_1\, x_1 + b_3\, x_3)\, u_3\, u_1 + (c_1\, x_1 + c_2\, x_2)\, u_1\, u_2 = 0. \qquad 2)$$

Als Gleichung der Kurve 4. Ordnung mit drei Doppelpunkten erhält man für die gleichen Bedingungen:

$$F_{3,0} \equiv x_1^2 x_2^2 (a_2 \cdot b_1)^2 + x_2^2 x_3^2 (b_3 - c_2)^2 + x_3^2 x_1^2 (c_1 - a_3)$$
$$- 2\, x_1^2 x_2\, x_3\, [(a_2 + b_1)\, c_1 - (a_2 - b_1)\, a_3]$$
$$- 2\, x_2^2 x_3\, x_1\, [(b_3 + c_2)\, a_2 - (b_3 - c_2)\, b_1] \qquad 3)$$
$$- 2\, x_3^2 x_1\, x_2\, [(c_1 + a_3)\, b_3 - (c_1 - a_3)\, c_2] = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung noch:

$$\begin{aligned} A &\equiv a_3\, b_1 + a_2\, c_1 - a_2\, a_3, \\ B &\equiv b_1\, c_2 + b_3\, a_2 - b_3\, b_1, \\ C &\equiv c_2\, a_3 + c_1\, b_3 - c_1\, c_2. \end{aligned} \qquad 4)$$

so erhält man Gleichung 3) in der Form:

$$\begin{aligned} f_{3,0} \equiv\; & x_1^2\, x_2^2\, (a_2 - b_1)^2 + x_2^2\, x_3^2 (b_3 - c_2)^2 + x_3^2 x_1^2 (c_1 - a_3)^2 \\ & - 2\, x_1^2\, x_2\, x_3\, [b_1\, c_1 + A] \\ & - 2\, x_2^2\, x_3\, x_1\, [c_2\, a_2 + B] \\ & - 2\, x_3^2\, x_1\, x_2\, [a_3\, b_3 + C] = 0. \end{aligned} \qquad 5)$$

Es ist nicht schwer, für den Connex $f_{3,0} = 0$ alle sieben Grundstrahlen anzugeben. Drei Grundstrahlen wurden als Fundamentalseiten gewählt, ihre Gleichungen sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Man kann aber sofort gleich noch drei weitere Grundstrahlen angeben. Für den allgemeinen Connex (1,2) zerfiel die zur Ecke 1 des Fundamentaldreiecks gehörige Kurve $X_y = 0$ in die Grundstrahlen $x_2 = 0$ $x_3 = 0$, und eine Gerade $a_x = 0$, die nicht Grundstrahl sein konnte und die nicht durch y hindurchging. Für den Connex $f_{3,0} = 0$ aber ist die Gleichung dieser Geraden $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$, und man sieht, dass die Gerade ebenfalls durch die Ecke 1 geht. Daher bildet sie mit jedem ihrer Punkte ein Element der Hauptcoincidenz, d.h. sie ist Grundstrahl. Das Analoge gilt für die beiden andern Ecken des Fundamentaldreiecks, und man kann daher den Satz aussprechen: „Die in der Connexgleichung 2) vorkommenden Formen $a_2 x_2 + a_3 x_3$, $b_1 x_1 + b_3 x_3$, $c_1 x_1 + c_2 x_2$ bedeuten gleich Null gesetzt die Gleichungen dreier weiterer Grundstrahlen des Connexes $f_{3,0} = 0$, und es tritt dreimal der Fall ein, dass sich drei Grundstrahlen in einem Punkte schneiden. Die drei

Schnittpunkte sind die Doppelpunkte der zum Connex gehörigen Kurve $F_{3,0} = 0$.

Im allgemeinen hat jede Kurve $X_y = 0$ einen Doppelpunkt, wie wir gesehen haben. Die Formen 3. Ordnung von drei Variabeln besitzen zwei Invarianten S und T, welche für eine ternäre Form $a_x^3 = b_x^3 = c_x^3 = \ldots$ unter Anwendung von Symbolen dargestellt sind durch

$$S = (abc)\,(abd)\,(acd)\,(bcd),$$
$$T = (abc)\,(abd)\,(ace)\,(bcf)\,(def)^2.$$

Die zu der Kurve $X_y = 0$ gehörigen Invarianten bezeichnen wir mit $S_y$ und $T_y$. Dann ist für den Doppelpunkt der Kurve $X_y = 0$ die Relation

$$S_y^3 - 6\,T_y^2 = 0$$

identisch erfüllt. Der Doppelpunkt geht in einen Rückkehrpunkt über, wenn die Tangenten im Doppelpunkt zusammenfallen. Da diese aber nichts anderes sind als die beiden zum Doppelpunkt gehörigen Coincidenzstrahlen, so ist die Existenz des Rückkehrpunkts durch das Zusammenfallen der Coincidenzstrahlen bedingt, was für alle Punkte der Kurve $F = 0$ eintritt. Analytisch wird das Auftreten des Rückkehrpunktes durch das Bestehen der Gleichungen $S_y = 0$, $T_y = 0$ ausgedrückt. Einem Doppelpunkt von $F_{3,0} = 0$ müsste nun eine Kurve $X_y = 0$ mit zwei Rückkehrpunkten entsprechen, was nicht möglich ist. Die Kurve $X_y = 0$ muss in diesem Falle also ausarten, und wir haben gesehen, dass sie in der Tat in drei in y sich schneidende Gerade zerfällt. Sie hat demnach in y einen dreifachen Punkt.

Es erübrigt jetzt nur noch den siebenten Grundstrahl anzugeben. Die im § 1 abgeleiteten Bedingungen für die Grundstrahlen gewinnen für den Connex $f_{3,0} = 0$ folgende Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}(a_2 u_3 + c_2 u_1) u_2 u_3 - (a_3 u_2 + b_3 u_1) u_2 u_3 = 0,\\ (b_3 u_1 + a_3 u_2) u_3 u_1 - (b_1 u_3 + c_1 u_2) u_3 u_1 = 0,\\ (c_1 u_2 + b_1 u_3) u_1 u_2 - (c_2 u_1 + a_2 u_3) u_1 u_2 = 0.\end{aligned}\right\} \quad 6)$$

Man erkennt sofort, dass die bisher gefundenen sechs Grundstrahlen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, $b_1x_1 + b_3x_3 = 0$, $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ obige Bedingungen wirklich erfüllen. Für den siebenten Grundstrahl kommen die Koordinatenwerte $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ nicht in Betracht, man kann daher in den Gleichungen 6) die Produkte $u_2 u_3$, $u_3 u_1$, $u_1 u_2$ vernachlässigen.

Man erhält aus 6):

$$\left.\begin{aligned}(c_2 - b_3) u_1 - a_3 u_2 + a_2 u_3 = 0\\ (a_3 - c_1) u_2 + b_3 u_1 - b_1 u_3 = 0\end{aligned}\right\} \quad 7)$$

also:

$$u_1 = (a_3 b_1 + a_2 c_1 - a_2 a_3) \cdot \rho,$$
$$u_2 = (b_1 c_2 + b_3 a_2 - b_3 b_1) \cdot \rho,$$
$$u_3 = (c_2 a_3 + c_1 b_3 - c_1 c_2) \cdot \rho,$$

wobei $\rho$ Proportionalitätsfaktor, und eine einfache Ueberlegung ergibt, dass die gefundenen Werte der $u$ die Gleichungen 6) identisch befriedigen. Der siebente Grundstrahl besitzt daher die Gleichung:

$$(a_3 b_1 + a_2 c_1 - a_2 a_3) x_1 + (b_1 c_2 + b_3 a_2 - b_3 b_1) x_2 + (c_2 a_3 + c_1 b_3 - c_1 c_2) x_3 = 0$$

oder

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0, \quad 8)$$

wo A, B, C die, durch die Definitionen 4) bestimmte Bedeutung haben.

Wir wissen, dass dem Schnittpunkt zweier Grundstrahlen eine Kurve $X_y = 0$ entspricht, welche im allgemeinen eine Doppeltangente der Kurve 4. Ordnung liefert. Für den Fall der Kurve 4. Ordnung, mit drei Doppelpunkten ist es jetzt verhältnissmässig einfach, mit Hilfe der nun bekannten Grundstrahlen die Gleichungen sämtlicher Doppeltangenten der Kurve $F_{3,0} = 0$ aufzustellen.

Für den Schnittpunkt y der Grundstrahlen $x_1 = 0$

und $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ findet man

$$Bx_2 + Cx_3 = 0,$$

$y_1 = 0$, $y_2 = C$, $y_3 = -B$. Unter Berücksichtigung von $u_i = (xy)_i$ erhält man dann:

$$u_1 = -x_2 B - x_3 C$$
$$u_2 = x_1 B$$
$$u_3 = x_1 C.$$

Setztman diese Werte der $u_i$ in die Connexgleichung 2) ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen

$$X_y \equiv x_1 \cdot [x_2^2 B^2 c_2 + x_3^2 C^2 b_3 + x_1 x_2 ABc_2 + x_1 x_3 ACb_3 + x_2 x_3 BC(b_3 + c_2)] = 0.$$

Der Grundstrahl $x_1 = 0$ ist, wie man sieht, Bestandteil der Kurve $X_y = 0$. Es muss aber auch der Grundstrahl $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ Bestandteil der Kurve sein. In der Tat lässt sich die eben gefundene Gleichung schreiben wie folgt:

$$X_y = x_1 \cdot [Ax_1 + Bx_2 + Cx_3] \cdot [Bc_2 x_2 + Cb_3 x_3] = 0.$$

Ist also y der Schnittpunkt der Geraden 8) mit $x_1 = 0$, so besteht die Kurve $X_y = 0$ aus den beiden gewählten Grundstrahlen und einer dritten Geraden mit der Gleichung

$$Bc_2 x_2 + Cb_3 x_3 = 0.$$

Die letztere Gerade ist Doppeltangente der Kurve $F_{3,0} = 0$. Sie geht durch den Doppelpunkt $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ der Kurve 4. Ordnung.

Analogfindet man die den Schnittpunkten von $x_2 = 0$ bezw. $x_3 = 0$ mit dem Grundstrahl $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ entsprechenden Doppeltangenten. Es gehört nämlich zum Schnittpunkt der Grundstrahlen $x_2 = 0$ und $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ die Doppeltangente

$$Ca_3 x_3 + Ac_1 x_1 = 0,$$

welche durch den Doppelpunkt $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ geht, und zum Schnittpunkt der Grundstrahlen $x_3 = 0$ und $Ax_1$ +

$Bx_2 + Cx_3 = o$ die Doppeltangente

$$Ab_1 x_1 + Ba_2 x_2 = o,$$

welche durch den Doppelpunkt $x_1 = o$, $x_2 = o$ geht.

Der Schnittpunkt y der Grundstrahlen $a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$ und $b_1 x_1 + b_3 x_3 = o$ hat die Koordinaten $y_1 = -a_2 b_3$, $y_2 = -a_3 b_1$, $y_3 = a_2 b_1$, und man erhält aus der Connexgleichung 2)

$$Xy \equiv [a_2 x_2 + a_3 x_3]\,[b_1 x_1 + b_3 x_3]\,[Ab_1 x_1 + Ba_2 x_2] = o.$$

Die Kurve 3. Ordnung zerfällt also in die beiden gewählten Grundstrahlen und die Doppeltangente

$$Ab_1 x_1 + Ba_2 x_2 = o.$$

Zum Schnittpunkt von $b_1 x_1 + b_3 x_3 = o$. und $c_1 x_1 + c_2 x_2 = o$ findet man analog die Doppeltangente $Bc_2 x_2 + Cb_3 x_3 = o$, zum Schnittpunkt von $a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$ und $c_1 x_1 + c_2 x_2 = o$ die Doppeltangente $Ac_1 x_1 + Cb_3 x_3 = o$,

Für den Schnittpunkt der Grundstrahlen $x_1 = o$ und $a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$ hat man als Koordinaten $y_1 = o$, $y_2 = -a_3$, $y_3 = a_2$ und man erhält:

$$Xy \equiv x_1 \,.\, [a_2 x_2 + a_3 x_3] \,.\, [Ax_1 + a_2 c_2 x_2 + a_3 b_3 x_3] = o.$$

Die Kurve 3. Ordnung zerfällt daher in die beiden gewählten Grundstrahlen und die Doppeltangente

$$Ax_1 + a_2 c_2 x_2 + a_3 b_3 x_3 = o.$$

Analog findet man für den Schnittpunkt der Grundstrahlen $x_2 = o$ und $b_1 x_1 + b_3 x_3 = o$ die Doppeltangente

$$b_1 c_1 x_1 + Bx_2 + b_3 a_3 x_3 = o,$$

für den Schnittpunkt der Grundstrahlen $x_3 = o$ und $c_1 x_1 + c_2 x_2 = o$ die Doppeltangente

$$c_1 b_1 x_1 + c_2 a_2 x_2 + Cx_3 = o.$$

Für den Schnittpunkt der Grundstrahlen $a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$ und $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = o$ ergeben sich als Koordinaten

$$y_1 = a_3 B - a_2 C,$$
$$y_2 = -a_3 A,$$
$$y_3 = a_2 A.$$

Daraus finden wir unter

Berücksichtigung von $u_i = (xy)_i$:

$$u_1 = A(a_2 x_2 + a_3 x_3),$$
$$u_2 = (a_3 B - a_2 C) x_2 - a_2 A x_1,$$
$$u_3 = -(a_3 A x_1 + (a_3 B - a_2 C) x_2).$$

Die mit Hilfe dieser Werte ermittelte Gleichung der Kurve $X_y = 0$ enthält den Faktor $(a_2 x_2 + a_3 x_3)$. Die Kurve zerfällt also, wie zu erwarten war, in den Grundstrahl $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ und einen Kegelschnitt $K = 0$. Die Ausrechnung zeigt, dass der Koëffizient von $x_2 x_3$ in der Gleichung dieses Kegelschnitts verschwindet, wodurch man erhält:

$$K = -A^3 x^2_1 - A^2 B x_1 x_2 - A^2 C x_1 x_3 = 0.$$

Der Kegelschnitt zerfällt daher in die Grundstrahlen $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ und $x_1 = 0$.

In analoger Weise findet man, dass dem Schnittpunkt von $b_1 x_1 + b_3 x_3 = 0$ und $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ der Grundstrahl $x_3 = 0$ zugeordnet ist.

Man bemerkt, dass die dem Schnittpunkt y der Grundstrahlen $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ und $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ entsprechende Kurve $X_y = 0$ aus diediesen beiden Grundstrahlen und einem weiteren Grundstrahl $x_1 = 0$ besteht, der nicht durch y hindurchgeht. Es bildet also nach der Definition des Grundstrahls jeder Punkt von $x_1 = 0$ mit $x_1 = 0$ ein Element der Hauptcoincidenz, ferner bildet aber nach der Definition der Kurve $X_y = 0$ auch jeder Punkt von $x_1 = 0$ und seine Verbindungslinie mit y ein Element der Hauptcoincidenz. Das Analoge gilt für die beiden Kurven 3. O., welche zu den Schnittpunkten von $b_1 x_1 + b_3 x_3 = 0$ mit $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ und $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ mit $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ gehören. Bezüglich der Hauptcoincidenz nehmen daher die genannten drei Kurven 3. O. eine Sonderstellung ein.

In jeder Ecke des Coordinatendreiecks schneiden

sich drei Grundstrahlen und bilden die zu dem Fundamentalpunkt gehörige Kurve 3. O. Betrachtet man den Fundamentalpunkt als Schnittpunkt von irgend zweien der drei Grundstrahlen ,so bildet der dritte die entsprechende Doppeltangente.

Die Tabelle I. (Seite 1. Anh.) gibt die Zusammenstellung sämtlicher Doppeltangenten der Kurve $F_{3,0} = 0$. wobei jedem Paar von Grundstrahlen die zugehörige Doppeltangente gegenübergestellt ist. Jede der letzteren besitzt eine besondere Bezeichnung $t_i$ gemäss ihrer Zugehörigkeit zu einem bestimmten Grundstrahlenpaar, um eine Vergleichung der Tabelle I. mit den folgenden Tabellen zu erleichtern, in welchen die den analogen Grundstrahlenpaaren zugeordneten Doppeltangenten die gleiche Bezeichnung aufweisen wie in Tabelle I. Die Grundstrahlen haben die Bezeichnungen $g_1$, $g_2$ etc.

## § 6.

### Die Kurve $F_{2,0} = 0$.

Setzt man in der auf drei Grundstrahlen bezogenen Connexgleichung $a_1 = 0$ und $b_2 = 0$, so wird dieselbe:

$$(a_2 x_2 + a_3 x_3) u_2 u_3 + (b_1 x_1 + b_3 x_3) u_3 u_1 + c_x u_1 u_2 = 0.$$

Diesem Connex gehört eine Kurve 4. O. zu, welche in den Ecken 1 und 2 des Fundamentaldreiecks einen Doppelpunkt besitzt. Sie sei mit $F_{2,0} = 0$ bezeichnet. Von den sieben Grundstrahlen dieses Connexes $f_{2,0} = 0$ lassen sich fünf sogleich angeben. Es sind dies die drei Fundamentallinien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und die beiden Graden $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$, $b_1 x_1 + b_3 x_3 = 0$, welch leztere aus $a_x = 0$ und $b_x = 0$ unter den Bedingungen $a_1 = 0$ und $b_2 = 0$ entstehen. Die zur

Ecke 1 des Fundamentaldreiecks gehörige Kurve $X_y = 0$ zerfällt, wie gezeigt wurde, in die Grundstrahlen $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und die Gerade $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$, welche durch y hindurchgeht und daher ebenfalls Grundstrahl ist. Für die Ecke 2 zerfällt $X_y = 0$ in die drei Grundstrahlen $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $b_1 x_1 + b_3 x_3 = 0$. Die zur Ecke 3 gehörige Kurve $X_y = 0$ besteht aus den beiden Grundstrahlen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und der Geraden $c_x = 0$. Diese Gerade geht aber nicht durch die Ecke 3, die wir nun als y betrachten, hindurch. Sie ist nicht Grundstrahl des Connexes $f_{2,0} = 0$, wohl aber Doppeltangente der Kurve $F_{2,0} = 0$, denn auf ihr liegen zwei der sechs Berührungspunkte der zu 3 gehörigen Kurve $X_y = 0$ mit $F_{2,0} = 0$, da die übrigen vier paarweise auf $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ liegen.

Die beiden noch fehlenden Grundstrahlen ergeben sich aus den für die Grundstrahlen geltenden Bedingungsgleichungen, welche im Falle des Connexes $f_{2,0} = 0$, sind:

$$(a_2 u_3 + c_2 u_1) u_2 u_3 - (a_3 u_2 u_3 + b_3 u_3 u_1 + c_3 u_1 u_2) u_2 = 0 ; 1)$$
$$(a_3 u_2 u_3 + b_3 u_3 u_1 + c_3 u_1 u_2) u_1 - (b_1 u_3 + c_1 u_2) u_1 u_3 = 0 ; 2)$$
$$(b_1 u_3 + c_1 u_2) u_1 u_2 - (a_2 u_3 + c_2 u_1) u_1 u_2 = 0. 3)$$

Setzt man $\frac{u_2}{u_1} = \mu, \frac{u_3}{u_1} = \nu$, so ergiebt sich unter Weglassung der gemeinsamen Faktoren aus 2) und 3):

$$(a_3 - c_1) \mu\nu + b_3 \nu - b_1 \nu^2 + c_3 \mu = 0, \quad 2')$$
$$(b_1 - a_2) \nu + c_1 \mu - c_2 = 0. \quad 3')$$

Setzt man den aus 3') entnommenen Wert von $\mu$ in 2') ein, so kommt:

$$\nu^2 (a_2 a_3 - a_3 b_1 - a_2 c_1) - \nu (c_1 c_2 - a_3 c_2 - b_3 c_1 + b_1 c_3 - a_2 c_3) + c_2 c_3 = 0,$$

oder indem man die früher eingeführten Werte A, B, C

gebraucht:

$$\nu^3 A + \nu [(b_1 - a_2) c_3 - C] - c_2 c_3 = 0.$$

Daraus erhält man für $\nu$:

$$\nu = \frac{[C-(b_1 - a_2) c_3] \pm \sqrt{[C-(b_1 - a_2) c_3]^2 + 4 A c_2 c_3}}{2 A}$$

Durch Einsetzen des aus 3′) entnommenen Wertes von $\nu$ in 2′) erhält man nach einigen Umformungen:
$\mu^2 Ac_1 - \mu [c_1 B + c_2 A + c_3 (b_1 - a_2)^2] + c^2 B = 0.$
Daraus erhält man für $\mu$:

$$\mu = \frac{[c_1 B + c_2 A + c_3 (b_1 - a_2)^2] \pm \sqrt{[c_1 B + c_2 A + c_3 (b_1 - a_2)^2]^2 - 4 ABc_1 c_2}}{2 Ac_1}$$

Setzt man den für $\nu$ gefundenen Wert in 3′) ein, so ergibt sich ein ein Wert von $\mu$, der die in $\nu$ vorkommende Wurzel enthält, also scheinbar von dem aus 2′) gefundenen Wert von $\mu$ abweicht. Es muss also ein Zusammenhang zwischen beiden Wurzelausdrücken existieren. In der Tat lässt sich zeigen, dass

$$\sqrt{[c_1 B + c_2 A + c_3 (b_1 - a_2)^2]^2 - 4 ABc_1 c_2}$$
$$= (b_1 - a_2) \sqrt{[C - (b_1 - a_2) c_3]^2 + 4 Ac_2 c_3},$$

wenn man beachtet, dass

$c_2 A - c_1 B = (b_1 - a_2) C$, also
$c_1 B + c_2 A + c_3 (b_1 - a_2)^2$
$= 2 c_2 A + (c_1 B - c_2 A) + c_3 (b_1 - a_2)^2$
$= 2 c_2 A - (b_1 - a_2) C + c_3 (b_1 - a_2)^2$ und
$4 AB c_1 c_2 = 4 Ac_2 [Ac_2 - (b_1 - a_2) C]$, wie man leicht bestätigt.

Erweitert man den Wert von $\nu$ mit $c_1$, so hat man als Koordinaten der gesuchten Grundstrahlen:

$u_1 = \rho\ 2Ac_1 \equiv \rho\ L,$

$u_2 = \rho\ ([c_1 B + c_2 A + c_3 (b_1 - a_2)^2]$

$- \sqrt{[c_1 B + c_2 A + c_3 (b_1 - a_2)^2]^2 - 4ABc_1c_2}) \equiv \rho\ M,$

$u_3 = \rho\ c_1 ([C - (b_1 - a_2) c_3]$

$- \sqrt{[C - (b_1 - a_2)\ c_3]^2 + 4\ A\ c_2 c_3}) \equiv \rho\ N$

und

$u'_1 = \rho'\ 2\ Ac_1 \equiv \rho'\ L',$

$u_2' = \rho'\ ([c_1 B + c_2 A + c_3 (b_1 - a_2)^2]$

$+ \sqrt{[c_1 B + c_2 A + c_3 (b_1 - a_2)^2]^2 - 4 ABc_1 c_2}) \equiv \rho' M',$

$u_3' = \rho' c_1 ([C - (b_1 - a_2)\ c_3]$

$+ \sqrt{[C - (b_1 - a_2)\ c_3]^2 + 4\ Ac_2\ c_3}) \equiv \rho'\ N',$

wobei $\rho$ und $\rho$ Proportionalitätsfakteren sind und die L, M etc. als Abkürzungen eingeführt werden. Die beiden letzten Grundstrahlen des Connexes $f_{2,0} = o$ haben also die Gleichungen:

$$Lx_1 + Mx_2 + Nx_3 = o \text{ und}$$
$$L'x_1 + M'x_2 + N'x_3 = o.$$

Setzt man in diesen Gleichungen $c_3 = o$, so erhält man aus der ersten $c_1 x_1 + c_2 x_2 = o$, aus den zweiten $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = o$, also die beiden letzten Grundstrahlen des Connexes $f_{3,0} = o$, wie es sein muss. Daher ist dem Grundstrahl $Lx_1 + Mx_2 + Nx_3 = o$ die Bezeichnung $g_6$, dem Grundstrahl $L'x_1 + M'x_2 + N'x_3 = o$ die Bezeichnung $g_7$ zu geben.

Es würde zu weit führen, mit Hilfe der sieben Grundstrahlen des Connexes $f_{2,0} = o$ die Gleichungen der Doppeltangenten der Kurve 4. O. $F_{2,0} = o$ wirklich aufzustellen, zumal die Beschaffenheit der Coëffizienten der Grundstrahlen $g_6$ und $g_7$ dies als sehr umständlich erscheinen lässt. In der Tabelle II (Seite 2. Anhang) sind daher nicht die Gleichungen der Grundstrahlen und

Doppeltangenten, sondern nur deren Bezeichnungen $g_k$ bezw. $t_i$ angegeben.

## § 7.

### Die Kurve $F_{1,0} = 0$.

Wenn von den drei Coëfizienten $a_1$, $b_2$, $c_3$ der auf drei Grundstrahlen bezogenen Connexgleichung nur einer zu Null wird, während die beiden andern von Null verschieden sind, so erhält man einen Connex $f_{1,0} = 0$, dem eine Kurve 4. O. $F_{1,0} = 0$ zugeordnet ist, welche nur einen Doppelpunkt besitzt. Der Doppelpunkt befindet sich dann in der Ecke 1 oder 2 oder 3 des Coordinatendreiecks, jenachdem entweder $a_1$ oder $b_2$ oder $c_3$ zu Null wird. Von den Grundstrahlen eines solchen Connexes lassen sich nur vier sogleich angeben, nämlich die drei Grundstrahlen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, welche als Fundamentalseiten gewählt wurden, und als vierter jener, dessen Gleichung aus $a_x = 0$ oder $b_x = 0$ oder $c_x = 0$ hervorgeht, jenachdem das Verschwinden von $a_1$ oder $b_2$ oder $c_3$ als Bedingung gefordert ist.

Während die Coëffizienten des siebenten Grundstrahles des Connexes $f_{3,0} = 0$ aus den Bedingungsgleichungen für die Grundstrahlen mit Hilfe einer Gleichung ersten Grades gefunden wurden, ergaben sich die Coëffizienten der Grundstrahlen $g_6$ und $g_7$ des Connexes $f_{2,0} = 0$, aus einer Gleichung zweiten Grades. Zur Ermittlung der Coëffizienten der drei fehlenden Grundstrahlen des Connexes $f_{1,0} = 0$, wäre die Lösung einer Gleichung dritten Grades notwendig. Da diese Berechnung ohne Interesse ist und die Zusammensetzung der fraglichen Coëffizienten noch viel verwickelter wird als im Falle des Connexes $f_{2,0} = 0$, so unterlassen wir sie gänzlich.

## § 8.

### Gruppierung der Doppeltangenten der Kurven $F_{3,0} = 0$, $F_{2,0} = 0$, $F_{1,0} = 0$.

Im Falle der allgemeinen Kurve 4. O. ergeben sich sämtliche 28 Doppeltangenten nur dann, wenn die den Schnittpunkten der Grundstrahlen zugeordneten Doppeltangenten alle verschieden und insbesondere nicht mit einem der sieben Grundstrahlen identisch sind. Hierin tritt jedoch eine Aenderung ein, sobald die Kurve 4. O. singuläre Punkte bekommt.

Für den Connex, dem eine Kurve $F_{3,0} = 0$ mit 3 Doppelpunkten zugehört, zeigt Tabelle I, dass in allen Fällen bis auf drei die einem Grundstrahlenpaar entsprechende Doppeltangente selbst wieder einer der sieben Grundstrahlen ist. Wir unterscheiden zwei Arten von Doppeltangenten, jenachdem sie durch einen singulären Punkt gehen oder nicht. Durch den Doppelpunkt 1 der Kurve $F_{3,0} = 0$, gehen die Doppeltangenten $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ und $Bc_2 x_2 + Cb_3 x_3 = 0$ durch den Doppelpunkt 2 gehen $x_3 = 0$, $x_1 = 0$, $b_1 x_1 + b_3 x_3 = 0$ und $Ca_3 x_3 + Ac_1 x_1 = 0$, durch den Doppelpunkt 3 endlich gehen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ und $Ab_1 x_1 + Ba_2 x_2 = 0$. Die Verbindungslinie zweier Doppelpunkte zählt als Doppeltangente vierfach, und es erscheinen die Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, in der Tat je viermal unter den Doppeltangenten der Tabelle I. Eine Doppeltangente, welche nur durch einen Doppelpunkt geht, zählt zweifach, was die Tabelle I, für die sechs Doppeltangenten $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$, $b_3 x_3 + b_1 x_1 = 0$, $c_1 x_1 + c_3 x_3 = 0$, $Bc_2 x_2 + Cb_3 x_3 = 0$, $Ca_3 x_3 + Ac_1 x_1 = 0$, und $Ab_1 x_1 + Ba_2 x_2 = 0$ bestätigt.

Es bleiben demnach nur vier wahre Doppeltangenten übrig, nämlich:

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0,$$
$$Ax_1 + a_2 c_2 x_2 + a_3 b_3 x_3 = 0,$$

$$Bx_2 + b_3 a_2 x_2 + b_1 c_1 x_7 = 0 \text{ und}$$
$$Cx_3 + c_1 b_1 x_7 + c_2 a_2 x_2 = 0.$$

Ihre Gleichungen zeigen, dass sie durch keinen Doppelpunkt gehen, sie bilden die oben erwähnten Doppeltangenten der zweiten Art.

War es schon ziemlich umständlich, die sieben Grundstrahlen des Connexes $f_{2,0} = 0$, aufzustellen, so stösst man bei der Berechnung der Grundstrahlen des Connexes $f_{1,0} = 0$, auf noch grössere Schwierigkeiten. Dasselbe gilt auch für die Doppeltangenten der entsprechenden Kurven $F_{2,0} = 0$ und $F_{1,0} = 0$. Wohl aber gelingt es mit Hilfe der vorigen Ueberlegungen die Gruppierung der Doppeltangenten für diese beiden Kurven anzugeben.

Die Kurve $F_{2,0} = 0$ habe ihre beiden Doppelpunkte in den Ecken 1 und 2 des Coordinatendreiecks, wofür als Bedingungen $a_1 = 0$ und $b_2 = 0$ erkannt wurden. Von den Grundstrahlen des Connexes $f_{2,0} = 0$ schneiden sich zweimal je drei in einem Punkte. Es sind dies die durch 1 gehenden Grundstrahlen $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ und die durch 2 gehenden Grundstrahlen $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $b_1 x_1 + b_2 x_3 = 0$. Die übrigen Grundstrahlen gehen durch keinen Doppelpunkte. Die Verbindungslinie $x_3 = 0$ der Doppelpunkte 1 und 2 muss unter den Doppeltangenten viermal erscheinen. Beachtet man, dass die Verbindungslinie von 1 und 2 auch in der Tabelle I. für die Kurve $F_{3,0} = 0$, zu finden ist, so erkennt man, dass in Tabelle II jede der Doppeltangenten $g_3 = 0$, $t_{22} = 0$, $t_{23} = 0$, $t_{25} = 0$ diese Verbindungslinie darstellt. Der Grundstrahl $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ geht durch 1, der Grundstrahl $b_1 x_1 + b_3 x_3 = 0$ durch 2, jeder muss also unter den Doppeltangenten zweimal auftreten, wofür man in Tabelle II die Linien $g_4 = 0$, $t_8 = 0$ und $g_5 = 0$, $t_9 = 0$ hat, wie die Vergleichung mit Tabelle I. ergibt. Schliesslich geht

durch 1 der Grundstrahl $x_2 = 0$, durch 2 der Grundstrahl $x_1 = 0$, von denen jeder zweimal als Doppeltangente auftreten muss. Da dem Schnittpunkt irgend zweier der drei Grundstrahlen durch 1 der dritte als Doppeltangente zugehört, und das Gleiche auch für 2 gilt, so bedeuten $g_2 = 0$ und $t_{27} = 0$ einersets, $g_1 = 0$ und $t_{28} = 0$ anderseits identische Doppeltangenten in Tabelle II. Man kann aber auch für die übrigen Doppeltangenten, ohne deren Gleichungen zu kennen, leicht nachweisen, ob sie durch einen Doppelpunkt gehen oder nicht, und daraus die wahren Doppeltangenten der Kurve $F_{2,0} = 0$ erkennen. Dem Grundstrahlenpaar $x_3 = 0$, $Lx_1 + Mx_2 + Nx_3 = 0$ z.B. entspricht als Doppeltangente die Linie $t_{13} = 0$. Der Schnittpunkt $y$ beider Grundstrahlen hat die Coordinaten $y_1 = -M$, $y_2 = L$, $y_3 = 0$. Unter Berücksichtigung von $u_i = (xy)_i$ erhält man man dann wie früher aus der Connexgleichung $f_{2,0} = 0$:

$$X_y = -M x_3 (L x_1 + M x_2)(a_2 x_2 + a_3 x_3)$$
$$- L x_3 (L x_1 + M x_2)(b_1 x_1 + b_3 x_3) + M x_3 . L x_3 . c_x = 0.$$

Dividiert man durch $x_3$, so stellt die linke Seite der übrigbleibenden Gleichung II. Grades das Produkt von $Lx_1 + Mx_2 + Nx_3$ und einer linearen Funktion der $x_i$ vor, welche gleich Null gesetzt die Gleichung der Doppeltangente $t_{13} = 0$ liefert. Dieses Produkt enthält die Formen $x_1^2$, $x_2^2$, $x_3^2$, $x_2 x_3$, $x_3 x_1$, $x_1 x_2$, was nur möglich ist, wenn auch die Gleichung von $t_{13}$ alle drei Coordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$ enthält. Dann geht aber $t_{13} = 0$ nicht durch einen Doppelpunkt, d.h. $t_{13} = 0$ ist wahre Doppeltangente von $F_{2,0} = 0$. Dem Grundstrahlenpaar $x_2 = 0$, $Lx_1 + Mx_2 + Nx_3 = 0$ entspricht die Doppeltangente $t_{24} = 0$. Wie vorhin findet man mit $y_1 = 0$, $y_2 = -N$, $y_3 = M$ und $u_i = (xy)_i$

$$X_y = MNx_1^2 (a_2 x_2 + a_3 x_3) - Nx_1 (Mx_2 + Nx_3)(b_1 x_1 + b_3 x_3)$$
$$- Mx_1 (Mx_2 + Nx_3) c_x = 0.$$

Die nach Division mit $x_1$ übrigbleibende Gleichung II. Grades enthält die Formen $x_2^2$, $x_3^2$, $x_2 x_3$, $x_3 x_1$, $x_1 x_2$, während $x_1^2$ fehlt. Die Gleichung von $t_{24}$ kann also nur die Coordinaten $x_2$ und $x_3$ enthalten, daher geht $t_{24}$ durch den Doppelpunkt 1 und ist keine wahre Doppeltangente. Auf diese Weise erhält man für die Kurve $F_{2,0} = 0$ die folgenden acht wahren Doppeltangenten:

$g_6 = 0$ und $g_7 = 0$ als Grundstrahlen,

$t_{10}$ mit der Gleichung $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$,

dann $t_{11} = 0$, $t_{12} = 0$ und $t_{13} = 0$, schliesslich

$t_{14} = 0$ und $t_{17} = 0$.

Sieht man von der vierfach zählenden Verbindungslinie der beiden Doppelpunkte ab, so gruppieren sich die übrigen Doppeltangenten folgendermassen:

Durch Punkt 1 gehen:

$g_2 = 0$, $t_{27} = 0$ mit der Gleichung $x_2 = 0$

$g_4 = 0$, $t_8 = 0$ mit der Gleichung $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$

$t_{15} = 0$, $t_{18} = 0$

$t_{21} = 0$, $t_{24} = 0$

Durch Punkt 2 gehen:

$g_1 = 0$, $t_{28} = 0$ mit der Gleichung $x_1 = 0$

$g_5 = 0$, $t_9 = 0$ mit der Gleichung $b_1 x_1 + b_3 x_3 = 0$

$t_{16} = 0$, $t_{19} = 0$

$t_{20} = 0$, $t_{26} = 0$

Die Vergleichung mit Tabelle I zeigt, dass von diesen Doppeltangenten viermal je zwei identisch sind,

$t_6 = 0$ }
$t_9 = 0$ }

$t_{20} = 0$ }
$t_{26} = 0$ }

$t_{22} = 0$ }
$t_{25} = 0$ }

## § 9.

### Das Auftreten von Spitzen.

Soll ein Doppelpunkt einer Kurve 4. O. in eine Spitze übergehen, so müssen die beiden Tangenten der Kurve im Doppelpunkt zusammenfallen. Für einen Doppelpunkt in der Ecke 1 des Coordinatendreiecks sind diese beiden Tangenten gegeben durch

$$x^2_2(a_2-b_1)^2+2x_2x_3[(a_2-b_1)a_3-(a_2+b_1)c_1]+x_3^2(c_1-a_3)^2=0,$$

die Gleichungen der Tangenten sind also:

$$x_2(a_2-b_1)^2+x_3[(a_2-b_1)a_3-(a_2+b_1)c_1$$
$$\pm\sqrt{[(a_2-b_1)a_3-(a_2+b_1)c_1]^2-(a_2-b_1)^2(c_1-a_3)^2}]=0$$

oder in einfacherer Form:

$$x_2(a_2-b_1)^2+x_3[(a_2-b_1)a_3-(a_2+b_1)c_1\pm 2\sqrt{b_1c_1A}]=0.$$

Ebenso erhält man als Tangenten eines Doppelpunktes in der Ecke 2 bezw. 3:

$$x_3(b_3-c_2)^2+x_1[(b_3-c_2)b_1-(b_3+c_2)a_2\pm 2\sqrt{c_2\,a_2\,B}]=0,$$
$$x_1(c_1-a_3)^2+x_2[(c_1-a_3)c_2-(c_1+a_3)b_3\pm 2\sqrt{a_3b_3C}]=0.$$

Das Zusammenfallen der Tangenten in einem Doppelpunkte tritt ein, wenn in dem entsprechenden Paare von Gleichungen der Wurzelausdruck verschwindet. Wenn also zu der für einen Doppelpunkt in 1 charakteristischen Bedingung $a_1 = 0$ als weitere Bedingung das Verschwinden des Ausdrucks $\sqrt{b_1c_1A}$ hinzukommt, so wird der Doppelpunkt in 1 zur Spitze. Die Wurzel verschwindet entweder für $b_1 = 0$ oder $c_1 = 0$

was durch die Klammern angedeutet ist. Jede Doppeltangente durch einen Doppelpunkt erscheint also zweimal.

Derselbe Gedankengang lässt sich auf eine Kurve $F_{1,0} = 0$ mit nur einem Doppelpunkt, der sich in der Ecke 2 des Coordinatendreiecks befinden möge, anwenden. Die Gleichung eines Connexes $f_{1,0} = 0$, dem die Kurve $F_{1,0} = 0$ mit einem Doppelpunkt in 2 zugehört, ergibt sich aus der auf drei Grundstrahlen bezogenen allgemeinen Connexgleichung für $b_2 = 0$. Es kommt bei diesem Connex nur einmal vor, dass sich drei Grundstrahlen in einem Punkte schneiden. Es sind dies die durch 2 gehenden Grundstrahlen $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $b_1 x_1 + b_3 x_3 = 0$, die übrigen Grundstrahlen gehen nicht durch den Doppelpunkt. Wahre Doppeltangenten sind also $g_2 = 0$, $g_4 = 0$, $g_6 = 0$, $g_7 = 0$, ebenso $t_8 = 0$, $t_{10} = 0$, $t_{11} = 0$, $t_{12} = 0$, $t_{13} = 0$, $t_{14} = 0$, $t_{17} = 0$, was man ohne weiteres durch Vergleichung der Tabelle III. mit Tabelle I. einsieht. Mit der vorhin benützten Methode und durch Vergleichung mit Tabelle I. erkennt man auch die Geraden $t_{15} = 0$, $t_{18} = 0$, $t_{27} = 0$, $t_{24} = 0$, $t_{27} = 0$ als wahre Doppeltangenten, während $t_{16} = 0$, $t_{19} = 0$, $t_{20} = 0$, $t_{22} = 0$, $t_{23} = 0$, $t_{25} = 0$, $t_{26} = 0$, u. $t_{28} = 0$ durch den Doppelpunkt gehen. Die Kurve 4. O. mit einem Doppelpunkt hat demnach 16 wahre Doppeltangenten. Von diesen hat $g_2$ die Gleichung $x_2 = 0$, $t_8$ die Gleichung $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$, $t_{10}$ die Gleichung $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$. Von den 12 durch den Doppelpunkt gehenden Doppeltangenten erscheint jede in der Tabelle III. zweimal. Es sind dies:

$\left.\begin{matrix} g_1 = 0 \\ t_{28} = 0 \end{matrix}\right\}$ mit der Gleichung $x_1 = 0$.

$\left.\begin{matrix} g_3 = 0 \\ t_{23} = 0 \end{matrix}\right\}$ mit der Gleichung $x_3 = 0$.

$\left.\begin{matrix} g_5 = 0 \\ t_9 = 0 \end{matrix}\right\}$ mit der Gleichung $b_1 x_1 + b_3 x_3 = 0$.

oder $A_1 = 0$. Setzt man in der allgemeinen Connexgleichung $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, so hat die zugehörige Kurve 4. O. in der Tat in 1 eine Spitze, denn die Tangenten der Kurve in 1 sind gegeben durch:

$$x_1^2 a_2^2 + 2 x_2 x_3 (a_2 a_3 - b_1 c_1) + x_3^2 (c_1 - a_3)^2 = 0 \text{ oder}$$

$$[a_2 x_2 - (c_1 - a_3) x_3]^2 = 0,$$

d.h. die Tangenten fallen zusammen. Analog erhält man für $a_1 = 0$, $c_1 = 0$ einen Connex, dessen zugehörige Kurve 4. O. in 1 eine Spitze besitzt. Nimmt man schliesslich in der allgemeinen Connexgleichung $a_1 = 0$, während ihre Coëffizienten gleichzeitig der Bedingung $A = 0$ unterworfen sein sollen, so sind die Tangenten der entsprechenden Kurve 4. O. im Punkte 1 gegeben durch:

$$x_2^2 (a_2 - b_1)^2 - 2 x_2 x_3 b_1 c_1 + x_3^2 (c_1 - a_3)^2 = 0,$$

die Gleichungen der Tangenten also

$$x_2 (a_2 - b_1)^2 + x_3 [-b_1 c_1 \pm \sqrt{b_1^2 c_1^2 - (a_2 - b_1)^2 (c_1 - a_3)^2}] = 0$$

oder

$$x_2 (a_2 - b_1)^2 + x_3 [-b_1 c_1 \pm \sqrt{A (2 b_1 c_1 - A)}] = 0.$$

Da aber $A = 0$ vorausgesetzt wurde, so fallen auch hier die Tangenten zusammen, d.h. 1 ist Spitze.

Desgleichen kann man sagen: Nimmt man in der allgemeinen Connexgleichung zu der Bedingung $b_2 = 0$ als weitere Bedingung entweder $c_2 = 0$ oder $a_2 = 0$ oder $B = 0$, so hat die zugehörige Kurve 4. O. im Punkte 2 eine Spitze. Nimmt man zu der Bedingung $c_3 = 0$ als weitere Bedingung entweder $a_3 = 0$ oder $b_3 = 0$ oder $C = 0$, so hat die zugehörige Kurve 4. O. im Punkte 3 eine Spitze.

## § 10.

### Die Kurven $F_{0,3} = 0$, $F_{1,2} = 0$, $F_{2,1} = 0$.

In den folgenden Untersuchungen gehen wir von

einer Kurve 4. O. aus, welche in den Ecken 1, 2 und 3 des Coordinatendreiecks Spitzen hat. Indem wir dann die Spitzen allmählich in Doppelpunkte übergehen lassen und diese hinwiederum auflösen, schreiten wir vom Speziellen zum Allgemeinen vor.

Soll die Kurve 4. O. Spitzen in 1, 2 und 3 haben, so hat man neben $a_1 = 0$, $b_2 = 0$, $c_3 = 0$ für die Coëffizienten der allgemeinen Connexgleichung noch die Bedingungen $\sqrt{b_1\ c_1\ A} = 0, \sqrt{c_2\ a_2\ B} = 0, \sqrt{a_3\ b_3\ C} = 0$. Die drei Wurzeln verschwinden gleichzeitig, wenn gleichzeitig ein Faktor unter der ersten Wurzel, ein Faktor unter der zweiten Wurzel und ein Faktor unter der dritten Wurzel zu Null wird. Die neun Faktoren unter den Wurzeln gestatten die Bildung von 27 Gruppen von je drei Faktoren, so dass die drei Faktoren einer Gruppe, gleich Null gesetzt, die drei Wurzeln gleichzeitig zum Verschwinden bringen. Diese Gruppen sind:

| I. | II. | III. |
|---|---|---|
| A; $b_3$; $c_2$. | $a_2$; $a_3$; $b_1$. | A; B; $a_3$. |
| B; $c_1$; $a_3$. | $a_2$; $a_3$; $c_1$. | A; B; $b_3$. |
| C; $a_2$; $b_1$. | $b_1$; $b_3$; $a_2$. | B; C; $b_1$. |
| | $b_1$; $b_3$; $c_2$. | B; C; $c_1$. |
| | $c_1$, $c_2$; $a_3$. | A; C; $a_2$. |
| | $c_1$; $c_2$; $b_3$. | A; C; $c_2$. |
| | | A; B; C. |
| **IV.** | **V.** | **VI.** |
| A; $a_2$; $a_3$. | A; $a_2$; $b_3$ | $b_1$; $c_2$; $a_3$. |
| B; $b_1$; $b_3$. | A; $a_3$; $c_2$. | $c_1$; $a_2$; $b_3$. |
| C; $c_1$; $c_2$. | B; $b_1$; $a_3$. | |
| | B; $b_3$; $c_1$ | |
| | C; $c_1$; $a_2$. | |
| | C; $c_2$; $b_1$. | |

Kurven, welche zerfallen, schliessen wir von unseren Betrachtungen aus. Ein Zerfallen der Kurve 4. O. tritt aber ein, wenn die drei Faktoren irgend einer Gruppe

$x_1^2 x_2^2 b_1^2 + x_2^2 x_3^2 (b_3 - c_2)^2 + x_3^2 x_1^2 c_1^2 - 2x_1^2 x_2 x_3 b_1 c_1 + 2 x_2^2 x_3 x_1 b_1 (b_3 - c_2) - 2 x_3^2 x_1 x_2 (b_3 - c_2) c_1 = 0$

oder

$$[x_1 x_2 b_1 + x_2 x_3 (b_3 - c_2) - x_3 x_1 c_1]^2 = 0.$$

Die Kurve besteht also aus einem doppelt zählenden Kegelschnitt. Da sich das Analoge auch für die beiden andern Gruppe des Systems IV ergibt, so sind die Gruppen dieses Systems ebenfalls unbrauchbar.

Betrachtet man die erste Gruppe des Systems V, so ergibt sich aus $A = a_3 b_1 + a_2 c_1 - a_2 a_3 = 0$, da $a_2 = 0$ und $b_3 = 0$, entweder $a_3 = 0$ oder $b_1 = 0$. Ist $a_3 = 0$, so hat man die Gruppe $A, a_2, a_3$, also eine Gruppe des Systems IV, wobei überdies noch $b_3 = 0$, Ist $b_1 = 0$, so hat man $B, b_1, b_3$, also ebenfalls eine Gruppe von IV. Dieselbe Betrachtung lässt sich für die übrigen Gruppen des Systems V durchführen, daher ist auch dieses System unbrauchbar.

Somit bleiben von den 27 Gruppen nur die beiden Gruppen des Systems VI übrig, für welche sich nicht zerfallende Kurven 4. O. ergeben. Wir wählen die Bedingungen $b_1 = 0$, $c_2 = 0$, $a_3 = 0$. Da die Bedingungen $_1 = 0$, $b_2 = 0$, $c_3 = 0$ weiterbestehen, so geht die allgemeine Connexgleichung über in

$$a_2 x_2 u_2 u_3 + b_3 x_3 u_3 u_1 + c_1 x_1 u_1 u_2 = 0,$$

und die zugehörige Kurve 4. O. $F_{0,2}$ = somit der Gleichung:

$$a_2^2 x_1^2 x_2^2 + b_3^2 x_2^2 x_3^2 + c_1^2 x_3^2 x_1^2 - 2a_2 c_1 x_1^2 x_2 x_3 - 2 b_3 a_2 x_2^2 x_3 x_1 - 2 c_1 b_3 x_3^2 x_1 x_2 = 0$$

besitzt jetzt Spitzen in den Punkten 1, 2 und 3 des Coordinatendreiecks. Eine Zusammenstellung der Grundstrahlen und Doppeltangenten gibt Tabelle IV. Bezüglich der Grundstrahlen erkennt man, dass $g_4$ mit $g_2$, $g_5$ mit $g_3$, und $g_6$ mit $g_1$ zusammenfällt. Die Grundstrahlen gruppieren sich folgendermassen:

der Systeme I. und II. zu Null werden, wie Gleichung 5. Seite 19 unmittelbar zeigt. Die Gruppen der Systeme I. und II. sind daher für unsern Zweck nicht brauchbar.

Von den unter III. aufgeführten Gruppen enthält jede wenigstens zwei der Faktoren A, B, C. Nun bestätigt man, wenn man auf die Bedeutung der A, B, C zurückgeht, leicht die Beziehungen:

$$c_2 A - c_1 B = (b_1 - a_2)\ C,$$
$$a_3 B - a_2 C = (c_2 - b_3)\ A,$$
$$b_1 C - b_3 A = (a_3 - c_1)\ B,$$

deren erste schon auf Seite 27 erwähnt wurde. Aus diesen Beziehungen erkennt man aber sogleich, dass, wenn jedesmal zwei der Ausdrücke A, B, C zu Null werden, auch das dritte System unbrauchbar ist. Denn ist z. B. $A = o$, $B = o$, so ist entweder $b_1 = a_2 = o$, wodurch ohne weiteres die Ausdrücke für A und B zu Null werden, während C von Null verschieden sein kann, oder es ist $C = o$. Für $b_1 = a_2 = o$ zerfällt aber die Kurve 4. O. Ist anderseits $C = o$, während $a_2$ und $b_1$ von Null verschieden sein können, welchen Fall die 7. Gruppe des Systems III. angibt, so ist die Gleichung der Kurve:

$$x_1^2 x_2^2 (a_2 - b_1)^2 + x_2^2 x_3^2 (b_3 - c_2)^2 + x_3^2 x_1^2 (c_1 - a_3)^2 - 2 b_1 c_1 x_1^2 x_2 x_3 - 2 c_2 a_2 x_2^2 x_3 x_1 - 2 a_3 b_3 x_3^2 x_1 x_2 = o$$

oder

$$[x_1 x_2 (a_2 - b_1) + x_2 x_3 (b_3 - c_2) + x_3 x_1 (c_1 - a_3)]^2 = o,$$

d.h. die Kurve besteht aus einem doppelt zählenden Kegelschnitt. Ebenso sind durch die übrigen Gruppen des Systems III zerfallende Kurven 4. O. bestimmt.

Verschwinden die Faktoren A, $a_2$ und $a_3$ der ersten Gruppe des Systems IV, so lautet die Kurvengleichung

Durch Punkt 1 gehen:

$g_2 = o$, $g_4 = o$ mit der Gleichung $x_2 = o$.

$g_3 = o$, $g_5 = o$ mit der Gleichung $x_3 = o$.

Durch Punkt 2 gehen:

$g_1 = o$, $g_6 = o$ mit der Gleichung $x_1 = o$,

$g_3 = o$, $g_5 = o$

Durch Punkt 3 gehen:

$g_1 = o$, $g_6 = o$,

$g_2 = o$, $g_4 = o$

Durch jede Spitze gehen daher vier Grundstrahlen, welche paarweise zusammenfallen. Der Grundstrahl $g_7 = o$ hat die Gleichung

$$a_2 c_1 x_1 + b_3 a_2 x_2 + c_1 b_3 x_3 = o.$$

Dieser Grundstrahl ist die einzige Doppeltangente der Kurve 4. O., die nicht durch einen der singulären Punkte geht. Wie Tabelle IV zeigt, sind alle anderen Doppeltangenten mit einem der Grundstrahlen $g_1$, $g_2$ oder $g_3$ zusammengefallen, jede geht also durch zwei Spitzen. Die Verbindungslinie zweier Spitzen zählt als Doppeltangente neunfach, und in der Tat erscheint jede der Geraden $x_1 = o$, $x_2 = o$, und $x_3 = o$ neunmal in der Tabelle.

Im Falle der Kurve mit drei Doppelpunkten, $F_{3,0} = o$, entsprach dem Schnittpunkt y der Grundstrahlen $x_2 = o$ und $a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$ die Gerade $x_y = o$ als Doppeltangente, da die zugehörige Kurve $X_y = o$ aus den Geraden $x_2 = o$, $a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$ und $x_3 = o$ bestand. Für $x_3 = o$ geht diese Kurve jetzt in eine aus der Doppelgeraden $x_2 = o$ und der Geraden $x_3 = o$ bestehende

Kurve über. Doch kann nicht jeder Punkt der Doppelgeraden als Schnittpunkt y der beiden in ihr vereinigten Grundstrahlen aufgefasst werden, durch die Gerade $x_3 = o$ ist y als deren Schnittpunkt mit der Doppelgeraden bestimmt. Es gibt drei Kurven 3. O., welche in eine Doppelgerade und eine Gerade zerfallen. Es sind dies die Kurven, welche beziehungsweise bestehen aus der Geraden $x_1 = o$ und der Doppelgeraden $x_3 = o$,

„ „ $x_2 = o$ „ „ $x_1 = o$

„ „ $x_3 = o$ „ „ „ $x_2 = o$.

Wird also ein Doppelpunkt zur Spitze, so artet die der Spitze entsprechende Kurve $Xy = o$ in der Weise aus, dass sie in eine doppelt und eine einfach zu rechnende Gerade zerfällt.

Als Gleichungen der stationären Tangenten unserer Kurve $F_{0,3} = o$ findet man:

Für Punkt 1: $a_2 x_2 - c_1 x_3 = o$,

„ „ 2: $b_3 x_3 - a_2 x_1 = o$,

„ „ 3: $c_1 x_1 - b_3 x_2 = o$.

Stellt man die Determinante der Coëffizienten dieser drei Gleichungen auf, so erkennt man, dass

$$\begin{vmatrix} o & a_2 & -c_1 \\ -a_2 & o & b_3 \\ c_1 & -b_3 & o \end{vmatrix} = o.$$

Die Rückkehrtangenten dur Kurve 4. O. mit drei Spitzen schneiden sich daher in einem Punkte.

Ist nun $a_3$ von Null verschieden, während die Bedingungen $a_1 = o$, $b_2 = o$, $c_3 = o$, $c_2 = o$, $b_1 = o$ bestehen, so hat man eine Kurve 4. O. mit Spitzen in 1 und 2, 3 dagegen ist Doppelpunkt geworden. Von den Grundstrahlen fällt $g_5$ mit $g_3$, $g_6$ mit $g_1$ zusammen, $g_4$ hat die Gleichung $a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$. Die Grundstrahlen gruppieren sich wie folgt:

$$\left.\begin{array}{l} g_3 = 0 \\ g_5 = 0 \\ t_9 = 0 \\ t_{13} = 0 \\ t_{15} = 0 \\ t_{18} = 0 \\ t_{22} = 0 \\ t_{23} = 0 \\ t_{25} = 0 \end{array}\right\} \text{ mit der Gleichung } x_3 = 0,$$

Durch die Punkte 2 und 3 gehen:

$$\left.\begin{array}{l} g_1 = 0 \\ g_6 = 0 \\ t_{10} = 0 \\ t_{20} = 0 \\ t_{26} = 0 \\ t_{28} = 0 \end{array}\right\} \text{ mit der Gleichung } x_1 = 0.$$

Durch die Punkte 1 und 3 gehen:

$$\left.\begin{array}{l} g_2 = 0 \\ t_{14} = 0 \\ t_{17} = 0 \\ t_{21} = 0 \\ t_{24} = 0 \\ t_{27} = 0 \end{array}\right\} \text{ mit der Gleichung } x_2 = 0.$$

Durch Punkt 1 gehen:

$$\left.\begin{array}{l} g_4 = 0 \\ t_8 = 0 \\ t_{12} = 0 \end{array}\right\} \text{ mit der Gleichung } a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Durch Punkt 2 gehen:

$$\left.\begin{array}{l} t_{11} = 0 \\ t_{16} = 0 \\ t_{19} = 0 \end{array}\right\} \text{ mit der Gleichung } A_2 x_1 + a_3 b_3 x_3 = 0.$$

Die den beiden Spitzen entsprechenden Kurven $Xy = 0$, welche in eine Doppelgerade und eine Gerade zerfallen, bestehen aus:

der Geraden $x_1 = 0$ und der Doppelgeraden $x_3 = 0$ e-

Durch Punkt 1 gehen:

$g_2 = 0$,

$g_4 = 0$,

$g_3 = 0$, $g_5 = 0$ mit der Gleichung $x_3 = 0$.

Durch Punkt 2 gehen:

$g_1 = 0$, $g_6 = 0$ mit der Gleichung $x_1 = 0$,

$g_3 = 0$, $g_5 = 0$

Durch Punkt 3 gehen:

$g_1 = 0$, $g_6 = 0$,

$g_2 = 0$.

Durch jede Spitze gehen vier Grundstrahlen, von welchen je zwei zusammenfallen für die Spitze 2, während für die Spitze 1 nur ein Paar sich vereinigt. Durch den Doppelpunkt gehen drei Grundstrahlen, von welchen zwei zusammenfallen. Der Grundstrahl $g_7$ hat die Gleichung:

$$a_2(c_1 - a_3)\, x_1 + b_3 a_2 x_2 + c_1 b_3 x_3 = 0.$$

Er ist auch hier die einzige Doppeltangente, die nicht durch einen singulären Punkt geht. Von den übrigen Doppeltangenten erscheint $x_3 = 0$ als Verbindungslinie der beiden Spitzen in Tabelle V. neunmal, $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ erscheinen als Verbindungslinien von Spitze und Doppelpunkt je sechsmal, die beiden durch die Spitze 1 bezw. 2 gehenden Doppeltangenten $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ und $A_2 x_1 + a_3 b_3 x_3 = 0$ je dreimal, wie es sein muss. Die Doppeltangenten gruppieren sich folgendermassen:

Durch die Punkte 1 und 2 gehen.

nerseits und
der Geraden $x_2 = o$ und der Doppelgeraden $x_1 = o$ anderseits.

Für die Bedingungen $a_1 = o$, $b_2 = o$, $c_3 = o$ $b_1 = o$ hat man eine Kurve 4. O. $F_{2,1} = o$ mit Spitzeinz und Doppelpunkten in 2 und 3. Von den Grundstrahlen fällt $g_5$ mit $g_3$ zusammen, $g_4$ hat die Gleichung $a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$, $g_6$ die Gleichung $c_1 x_1 + c_2 x_2 = o$. Die Verteilung der Grundstrahlen ist folgende:

Durch Punkt 1 gehen:

$g_2 = o$
$g_4 = o$
$g_3 = o$
$g_5 = o$ ) mit der Gleichung $x_3 = o$.

Durch Punkt 2 gehen:

$g_1 = o$
$g_3 = o$
$g_5 = o$ )

Durch Punkt 3 gehen:

$g_1 = o$
$g_2 = o$
$g_6 = o$

Durch die Spitze gehen vier Grundstrahlen, von welchen zwei zusammenfallen, durch jeden Doppelpunkt gehen drei Grundstrahlen, wobei von den durch 2 gehenden zwei zusammenfallen. Wie Tabelle VI zeigt, ergeben sich zwei wahre Doppeltangenten, nämlich $g_7$ und $t_{11}$ mit den Gleichungen:
$a_2 (c_1 - a_3) x_1 + b_3 a_2 x_2 + [c_2 a_3 + c_1 (b_3 - c_2)] x_3 = o$ und
$a_2 (c_1 - a_3) x_1 + a_2 c_2 x_2 + a_3 b_3 x_3 = o$.

Von den übrigen Doppeltangenten erscheinen $x_2 = o$ und $x_3 = o$ als Verbindungslinien eines Doppelpunktes mit der Spitze je sechsmal, $x_1 = o$ als Verbindungslinie der beiden Doppelpunkte viermal in der Tabelle. Jede Doppeltangente durch die Spitze zählt dreifach, je-

de durch einen Doppelpunkt gehende zweifach. Man bekommt folgende Gruppierung der Doppeltangenten:

Durch die Punkte 1 und 2 gehen:

$g_3 = 0$
$g_5 = 0$
$t_9 = 0$
$t_{22} = 0$
$t_{23} = 0$
$t_{25} = 0$

mit der Gleichung $x_3 = 0$.

Durch die Punkte 1 und 3 gehen:

$g_2 = 0$
$t_{14} = 0$
$t_{17} = 0$
$t_{21} = 0$
$t_{24} = 0$
$t_{27} = 0$

mit der Gleichung $x_2 = 0$.

Durch die Punkte 2 und 3 gehen:

$g_1 = 0$
$t_{20} = 0$
$t_{26} = 0$
$t_{28} = 0$

mit der Gleichung $x_1 = 0$.

Durch Punkt 1 gehen:

$g_4 = 0$
$t_8 = 0$
$t_{12} = 0$

mit der Gleichung $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$.

$t_{13} = 0$
$t_{15} = 0$
$t_{18} = 0$

mit der Gleichung $a_2 c_2 x_2 + C_3 x_3 = 0$.

Durch Punkt 2 gehen:

$t_{16} = 0$
$t_{19} = 0$

mit der Gleichung $A_3 c_1 x_1 + C_3 a_3 x_3 = 0$.

Durch Punkt 3 gehen:

$g_6 = 0$
$t_{10} = 0$

mit der Gleichung $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$.

Die der Spitze entsprechende Kurve $Xy = 0$, welche in eine Doppelgerade und eine Gerade zerfällt, besteht aus der Geraden $x_1 = 0$ und der Doppelgeraden $x_2 = 0$.

Durch Punkt 1 und 2 gehen:

$g_3 = 0$, $g_5 = 0$, $t_9 = 0$, $t_{13} = 0$, $t_{15} = 0$, $t_{18} = 0$, $t_{22} = 0$, $t_{23} = 0$, $t_{25} = 0$ } mit der Gleichung $x_3 = 0$.

Durch Punkt 1 gehen:

$g_4 = 0$, $t_8 = 0$, $t_{12} = 0$ } mit der Gleichung $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$.

$g_2 = 0$, $t_{14} = 0$, $t_{27} = 0$ } mit der Gleichung $x_2 = 0$.

$t_{17} = 0$, $t_{21} = 0$, $t_{24} = 0$ }

Durch Punkt 2 gehen:

$g_1 = 0$, $g_6 = 0$, $t_{28} = 0$ } mit der Gleichung $x_1 = 0$.

$t_{11} = 0$, $t_{16} = 0$, $t_{19} = 0$ }

$t_{10} = 0$, $t_{20} = 0$, $t_{26} = 0$ }

Die den beiden Spitzen entsprechenden Kurven $X_\nu = 0$, welche in eine Doppelgerade und eine Gerade zerfallen, bestehen aus der Geraden $x_1 = 0$ und der Doppelgeraden $x_3 = 0$ einerseits und der Geraden $t_{24} = 0$ und der Doppelgeraden $x_1 = 0$ anderseits.

Für die Bedingungen $a_1 = 0$, $b_2 = 0$, $c_2 = 0$ erhält

## § 11.

### Die Kurven $F_{0,2} = 0$ und $F_{1,1} = 0$.

Nun mögen die Fälle betrachtet werden, wo die Kurve 4. O. zwei singuläre Punkte besitzt.

Die Bedingungen $a_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_1 = 0$, $c_2 = 0$ ergeben eine Kurve $F_{0,2} = 0$ mit Spitzen in 1 und 2, ausserdem hat die Kurve keinen singulären Punkt. Für die Betrachuntg der Grundstrahlen und Doppeltangenten benützen wir Tabelle II. zu dem schon behandelten Fall der Kurve $F_{2,0} = 0$ mit Doppelpunkten in 1 un 2.

Der Grundstrahl $g_5$ fällt mit $g_3$, der Grundstrahl $g_6$ mit $g_1$ zusammen (vgl. S. 281); $g_4$ hat dieGleichung $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$, $g_7$ die Gleichung:
$a_2 c_1 (c_1 - a_3) x_1 + a_2 [c_1 b_3 + c_3 a_2) x_2 + 1c (c_1 b_3 + c_3 a_2) x_3 = 0$.
Die Grundstrahlen gruppieren sich also:

Durch Punkt 1 gehen:

$g_2 = 0$
$g_4 = 0$
$g_3 = 0$
$g_5 = 0$ ) mit der Gleichung $x_3 = 0$.

Durch Punkt 2 gehen:

$g_1 = 0$
$g_6 = 0$ ) mit der Gleichung $x_1 = 0$.

$g_3 = 0$
$g_5 = 0$ )

Durch jede Spitze laufen vier Grundstrahlen, wobei von den durch Punkt 1 gehenden einmal zwei, von den durch Punkt 2 gehenden zweimal zwei zusammenfallen. Die Kurve hat nur eine einzige wahre Doppeltangente, es ist dies der Grundsrathl $g_7$. Von den übrigen Doppeltangenten erscheint jede durch eine Spitze gehende dreimal, die Verbindungslinie beider Spitzen neunmal, wie folgende Gruppierung zeigt:

man eine Kurve 4. O. mit Doppelpunkt in 1 und Spitze in 2, $F_{1,1} = 0$.' Der Grundstarhl $g_6$ fällt mit $g_1$ zusammen, wie man aus den auf Seite 28 aufgestellten Koordinatenbeziehungen für $c_2 = 0$ sofort erkennt. Der Grundstrahl $g_7$ hat die Gleichung

$A c_1 x_1 + [B c_1 + c_3 (b_1 - a_2)^2] x_2 + c_1 [C - c_3 (b_1 - a_2)^2] x_3 = 0$,

ist also wahre Doppeltangente der Kurve $F_{1,1} = 0$, Durch die Spitze gehen demnach vier Grundstrahlen, von welchen zwei zusammenfallen, durch den Doppelpunkt gehen drei Grundstrahlen. Die Gruppierung der Grundstrahlen ist nämlich:

Durch Punkt 1 gehen:

$g_2 = 0$,
$g_3 = 0$,
$g_4 = 0$,

Durch Punkt 2 gehen:

$g^1 = 0$,
$g_6 = 0$, } mit der Gleichung $x_1 = 0$.
$g_3 = 0$,
$g_5 = 0$.

Die Doppeltangente $t_{10}$ hat die Gleichung $c_1 x_1 + c_3 x_3 = 0$, sie geht also durch die Spitze, doch ist sie nicht Grundstrahl. Nach der mehrfach erwähnten Methode lässt sich zeigen, dass $t_{12}$, $t_{14}$ und $t_{17}$ wahre Doppeltangenten sind, so dass also die Kurve $F_{1,1} = 0$, vier wahre Doppeltangenten besitzt. Die übrigen 24 Doppeltangenten reduzieren sich derart, dass jede durch den Doppelpunkt gehende zweimal, jede durch die Spitze gehende dreimal und die Verbindungslinie von Doppelpunkt und Spitze sechsmal erscheint. Ihre Verteilung ist folgende:

Durch Punkt 1 und 2 gehen:

$g_3 = o$
$t_{15} = o$
$t_{18} = o$
$t_{22} = o$ mit der Gleichung $x_3 = o$.
$t_{23} = o$
$t_{25} = o$

Durch Punkt 1 gehen:

$g_4 = o$
$t_8 = o$ mit der Gleichung $a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$.

$g_2 = o$
$t_{27} = o$ mit der Gleichung $x_2 = o$.

$t_{21} = o$
$t_{24} = o$

Durch Punkt 2 gehen:

$g_1 = o$
$g_6 = o$
$t_{28} = o$ mit der Gleichung $x_1 = o$.

$g_5 = o$
$t_9 = o$
$t_{13} = o$ mit der Gleichung $b_1 x_1 + b_3 x_3 = o$.

$t_{10} = o$
$t_{20} = o$
$t_{26} = o$ mit der Gleichung $c_1 x_1 + c_3 x_3 = o$.

$t_{11} = o$
$t_{16} = o$
$t_{19} = o$

Die der Spitze entsprechende Kurve 3. O., welche in eine Gerade und eine Doppelgerade zerfällt, besteht aus der Geraden $t_{24} = o$ und der Doppelgeraden $x_1 = o$.

## § 12.

### Die Kurven $F_{0,1} = o$.

Löst man den Doppelpunkt im Punkte 1 auf, so bleiben nur die Bedingungen $b_2 = o$, $c_2 = o$ bestehen, für welche sich eine Kurve 4. O. mit Spitze in 2 ergibt, $F_{0,1} = o$. Mit Hilfe der Bedingungen für die Grundstrahlen lassen sich die Gleichungen der Grundstrahlen

unschwer angeben. Da indessen die einzelnen Glieder dieser Gleichungen sehr umfangreich sind, so sei hier nur erwähnt, dass die Grundstrahlen $g_4$ und $g_7$ wahre Doppeltangenten der Kurve werden, während $g_6$ mit $g_1$ zusammenfällt. Durch die Spitze gehen also die vier Grundstrahlen $g_1$, $g_3$, $g_5$, $g_6$, von welchen zwei zusammenfallen. Ebenso sind der Grundstrahl $g_2$ und die Gerade $t_8$ mit der Gleichung $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ wahre Doppeltangenten. Die Geraden $t_{12}$, $t_{14}$, $t_{17}$, $t_{21}$, $t_{24}$, $t_{27}$, die im vorigen Fall durch den Doppelpunkt 1 gingen, werden jetzt gleichfalls wahre Doppeltangenten, so dass die Kurve 4. O. mit einer Spitze zehn wahre Doppeltangenten aufweist. Die übrigen 18 Doppeltangenten gehen durch die Spitze, wobei jede dreimal erscheint. Es sind dies:

$g_1 = 0$, $g_6 = 0$, $t_{28} = 0$ mit der Gleichung $x_1 = 0$.

$g_3 = 0$, $t_{15} = 0$, $t_{23} = 0$ mit der Gleichung $x_3 = 0$.

$t_{18} = 0$, $t_{22} = 0$, $t_{25} = 0$

$g_5 = 0$, $t_9 = 0$, $t_{13} = 0$ mit der Gleichung $b_1 x_1 + b_3 x_3 = 0$.

$t_{10} = 0$, $t_{20} = 0$, $t_{26} = 0$ mit der Gleichung $c_1 x_1 + c_3 x_3 = 0$.

$t_{11} = 0$, $t_{16} = 0$, $t_{19} = 0$

Die der Spitze entsprechende Kurve 3. O., welche in eine Gerade und eine Doppelgerade zerfällt, besteht aus der Geraden $t_{24} = 0$ und der Doppelgeraden $x_1 = 0$

Wie in § 9 gezeigt wurde, lässt sich auch für die Gruppe $c_1$, $a_2$, $b_3$ des Systems VI eine Reihe nicht zerfallender Kurven 4. O. aufstellen. Die Wahl dieser Bedingungen macht es notwendig bei Betrachtung der Kurve mit Spitzen in 1 und 2 die Gleichungen der Grundstrahlen $g_6$ und $g_7$ neu aufzustellen, da in § 6 der Wert von $\nu$ mit $c_1$ erweitert wurde, während jetzt $c_1 = 0$ sein soll.

# IV. Die Kurven $U_v$.

## § 13.

### Allgemeines.

Eine Kurve 3. Klasse $U_v = 0$ ist definiert als Enveloppe aller Strahlen u, welche durch ihre Schnittpunkte mit einem festen Strahle v zu Elementen der Hauptcoincidenz ergänzt werden. Der Strahl v ist Tangente von $U_v$ und die beiden andern von einem Punkt auf v an die Kurve gehenden Tangenten sind die beiden zu dem Punkte gehörigen Coincidenzstrahlen.

Nun lässt sich zeigen, dass eine $U_v$ durch die sieben Grundstrahlen und zwei weitere Strahlen im allgemeinen bestimmt ist. $U_v$ enthält nämlich alle sieben Grundstrahlen. Dies folgt schon aus der Definition der Kurven $U_v$ und der Grundstrahlen. Man kann aber auch den analytischen Beweis leicht erbringen. Denn schreibt man die Connexgleichung wieder in der Form: $A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0$, (§ 1, Gleich. 4) so erhält man daraus $U_v$ durch Einsetznen von $x_i = (uv)_i$, nämlich: $U_v \equiv (A_2u_3 - A_3u_2)\, v_1 + (A_3u_1 - A_1u_3)\, v_2 + (A_1u_2 - A_2u_1)\, v_3 = 0$. Für einen Grundstrahl verschwindet aber diese Gleichung (nach § 3 Seite 15) identisch. Nimmt man jetzt noch zwei weitere Strahlen u′ und u″ an, so bestimmt die Connexgleichung für $u = u'$ und $u = u''$ die zu u′

und u'' gehörigen Coincidenzpunkte, durch welche v gehen muss. Damit ist v und also auch $U_v$ bestimmt. Eine Ausnahme besteht nur dann, wenn u' und u'' den gleichen Coincidenzpunkt besitzen. In diesem Falle bleibt v unbestimmt, und es existiert eine unendliche Anzahl von Kurven $U_v$, welche alle die beiden Strahlen u' und u'' und die sieben Grundstrahlen berühren. Die sieben Grundstrahlen bilden daher mit den beiden Coincidenzstrahlen eines beliebigen Punktes der Hauptcoincidenz ein System von neun Geraden, welche von einfach unendlich vielen Kurven 3. Kl. $U_v$ berührt werden.

Von den beiden Coincidenzstrahlen, welche zum Berührungspunkt von v mit der entsprechenden $U_v$ gehören, fällt der eine in die Richtung von v. Da die Kurve $U_v$ von der 3. Klasse ist, so wird sie von der Geraden v noch in vier weiteren Punkten geschnitten. Die beiden Coincidenzstrahlen eines solchen einfachen Schnittpunktes fallen aber zusammen mit der Tangente von $U_v$ in diesem Punkte. Da nun ein Punkt, dessen beide Coincidenzstrahlen zusammenfallen, auf der Kurve 4. O. F liegt, so müssen die erwähnten vier Schnittpunkte mit den vier Punkten identisch sein, in welchen die Kurve F von der Geraden v geschnitten wird.

Infolge dieses geometrischen Zusammenhangs lässt sich sogleich eine metrische Eigenschaft zeigen. Es ist bekannt, dass die absolute Invariante einer Kurve 3. O. Funktion des Doppelverhältnises der vier Tangenten ist, welche von einem Punkte der Kurve 3. O. an die Kurve gezogen werden können. Nach dem Princip der Dualität ergibt sich daher für eine Kurve 3. Klasse der Satz: Die absolute Invariante einer Kurve 3. Klasse ist Funktion des Doppelverhältnisses der vier Punkte, welche von einer Tangente der Kurve 3. Kl. auf der Kurve ausgeschnitten werden. Bezeichnet man

also die absolute Invariante von $U_v$ mit $k = \frac{S_v^3}{T_v^2}$,

so ist diese Invariante nach dem Vorhergehenden auch Funktion des Doppelverhältnisses der vier Punkte, in welchen die Kurve 4. O. F von v geschnitten wird. Daher haben alle Kurven $U_v$, deren Strahlen v die Kurve F nach dem gleichen Doppelverhältnis schneiden, die gleiche absolute Invariante. Nun ist aber die Beziehung bekannt, welche für alle Geraden v besteht, die eine Kurve 4. O. nach konstantem Doppelverhältnis schneiden. Führt man die symbolische Bezeichnungsweise der Formen 4. O.

$F = a_x^4 + b_x^4 + c_x^4 + \ldots = 0$

ein, so hat man als deren Contravarianten gefunden: $i_F = (abv)^4$ und $j_F = (a\,b\,v)^2\,(b\,c\,v)^2\,(a\,c\,v)^2$, und für alle Geraden v, welche F im gleichen Doppelverhältnis schneiden, hat man dann die Gleichung:

$i_F^3 - k\,j_F^2 = 0$.

Diese Gleichung gilt daher auch für alle $U_v$, welche das nämliche Doppelverhältnis haben, und es muss die eben genannte Bedingung mit der oben erwähnten, nämlich mit $S_v^3 - kT_v^2 = 0$ gleichbedeutend sein. Daraus folgt, dass die Invarianten $S_v$ und $T_v$ von $U_v$ den Contravarianten $i_F$ und $j_F$ von F proportional sind.

Bekommt eine Kurve $U_v$ eine Doppeltangente, so wird die Kurve, da sich die Ordnung reduziert, von der zugehörigen Geraden v nurmehr in zwei auf der Kurve liegenden Punkten geschnitten, während die beiden andern der genannten vier einfachen Schnittpunkte in den Schnittpunkt von v mit der Doppeltangente hineinrükken. In diesem Falle muss also die Gerade v eine einfache Tangente der Kurve 4. O. F werden, und umgekehrt

hat man immer eine Kurve $U_v$ mit Doppeltangente, wenn v Tangente von F ist. Es existiert also eine ganze Schar von Kurven $U_v$ mit Doppeltangente, deren sämtliche v die Kurve F umhüllen. Ist dagegen die Gerade v selbst Doppeltangente ihrer Kurve $U_v$, so fallen in jedem der beiden Berührungspunkte die zwei Coincidenzstrahlen mit v zusammen und in beiden Punkten berührt v zugleich die Kurve F. Man hat dann aber auf v zwei Coincidenzpunkte, was nur möglich ist, wenn v Grundstrahl ist. Es gibt daher sieben spezielle Kurven 3. Klasse $U_v$, von von denen jede einen der sieben Grundstrahlen zur Doppeltangente hat, welch letztere die Kurve $U_v$ und und die Kurve F in den beiden nämlichen Punkten berührt.

Betrachtet man die 21 anderen Doppeltangenten von F, welche nicht Grundstrahlen sind, als Linien v, so gehören zu denselben Kurven $U_v$, die in einen Punkt and einen Kegelschnitt zerfallen, also zwei Doppeltangenten besitzen. Wir erinnern uns, dass im allgemeinen dem Schnittpunkt zweier Grundstrahlen eine Kurve $X_y$ zugehört, die aus den beiden Grundstrahlen und einer Doppeltangente von F besteht, die nicht Grundstrahl ist. Daher besteht die dieser Doppeltangente entsprechende Kurve $U_v$ aus dem Schnittpunkt der beiden Grundstrahlen und, da durch diesen Punkt kein weiterer Grundstrahl geht, aus einem Kegelschnitt, der von den 5 anderen Grundstrahlen und der Doppeltangente berührt wird. Die beiden Tangenten von dem Punkt an den Kegelschnitt sind die Doppeltangenten der Kurve $U_v$; si gehen nach dem obigen durch die Berührungspunkte der als v genommenen Doppeltangente mit F.

Da $iF^3 - 6jF^2 = 0$ die Darstellung von F in Linienkoordinaten ist, diese Gleichung aber mit $S_v^3 - 6T_v^2 =$

o gleichbedeutend ist, so haben alle jene Kurven $U_v$ eine Doppeltangente, deren v der Bedingung $S_v^3 - 6\,T_v^2 = o$ genügt. Bestehen gleichzeitig die Bedingungen $S = o$ und $T = o$ für eine Kurve 3. O., so hat sie einen Rückkehrpunkt, wie Salmon wohl zuerst zeigte und Gundelfinger (Math. Ann. Bd. IV, pag. 563) bestätigte. Für unsere Kurven 3. Klasse sind daher $S_v = o$ und $T_v = o$ in dualer Weise die Bedingungen, dass $U_v$ eine Inflexionstangente besitze. Da $S_v = o$ vom vierten, $T_v = o$ vom sechsten Grade in den v wird, so gibt es 24 Kurven $U_v$ mit einer Inflexionstangente. Wenn aber $S_v = o$ und $T_v = o$ gleichzeitig bestehen, so hat man als gleichbedeutende Bedingungen auch $i_F = o$ und $j_F = o$. Nun weiss man, dass diese letzteren Gleichungen die 24 Inflexionstangenten von F bestimmen, daher gehört zu jeder Inflexionstangente von F als v genommen eine $U_v$ mit Inflexionstangente.

## § 14.

**Die Kurven $U_v$ bei Kurven 4. O mit Doppelpunkten.**

Das Auftreten von Doppelpunkten oder Spitzen bei der Kurve F ist von Einfluss auf die Lage der sieben Grundstrahlen.

Für den Fall der Kurve $F_{1,0} = o$ mit Doppelpunkt in der Ecke 2 des Coordinatendreiecks laufen drei Grundstrahlen durch den Doppelpunkt, nämlich $g_1$, $g_3$ und $g_5$, während von den übrigen Grundstrahlen keine drei durch einen Punkt gehen. Welche Kurven $U_v$ entsprechen jetzt den sieben Grundstrahlen, als Strahlen v genommen? Betrachtet man einen der vier nicht durch den Doppelpunkt gehenden Grundstrahlen als v, so entspricht demselben eine Kurve $U_v$, welche den Grundstrahl zur Doppeltangente hat, wobei letztere die Kurve $U_v$ und die Kurve $F_{1,0}$ in den beiden nämlichen Punkten berührt.

Dagegen gehört jedem der drei durch den Doppelpunkt laufenden Grundstrahlen eine Kurve $U_v$ zu, welche in den Doppelpunkt und einen Kegelschnitt zerfällt. Da der als v gewählte Grundstrahl Doppeltangente seiner $U_v$ sein muss u. d. eine Berührungspunkt der Doppelpunkt ist, so berührt v auch den Kegelschnitt und zwar in dem Punkte, in welchem $F_{1,0}$ von v berührt wird. Ebenso sind die vier nicht durch den Doppelpunkt gehenden Grundstrahlen Tangenten des Kegelschnitts, der damit also vollständig bestimmt ist. Ein Zerfallen des Kegelschnitts in ein Punktepaar ist nicht möglich, da v durch den einen dieser Punkte gehen müsste, und sich also weitere drei Grundstrahlen in einem Punkte schnitten, was der Voraussetzung widerspricht. Die beiden anderen ausser v durch den Doppelpunkt laufenden Grundstrahlen berühren den Kegelschnitt nicht. Die eine der zwei Doppeltangenten der zerfallenen Kurve 3. Klasse ist die Gerade v, die andere ist die zweite noch mögliche Tangente vom Doppelpunkt an den Kegelschnitt. Durch die Rechnung finden die gemachten Bemerkungen auf einfache Weise ihre analytische Bestätigung.

Wie Tabelle III zeigt, hat man 12 Doppeltangenten, die nicht Grundstrahlen sind und nicht durch den Doppelpunkt gehen entsprechend den 12 Punkten, in welchen die durch den Doppelpunkt gehenden drei Grundstrahlen die andern vier Grundstrahlen schneiden. Einer solchen Doppeltangente, als v betrachtet, gehört eine $U_v$ zu, welche zerfällt in den Schnittpunkt der beiden zur Doppeltangente gehörigen Grundstrahlen und einen Kegelschnitt, der von den fünf anderen Grundstrahlen und der Doppeltangente berührt wird. Die Anzahl der Doppeltangenten, welche nicht Grundstrahlen sind, aber durch den Doppelpunkt laufen, ist sechs, entsprechend den drei

Paar Gegenecken des vollständigen Vierseits, welches von den vier Grundstrahlen, die nicht durch den Knotenpunkt gehen, gebildet wird. Diese Doppeltangenten sind $t_{16}$, $t_{19}$, $t_{20}$, $t_{26}$; $t_{22}$, $t_{25}$. Nun wissen wir nach dem Früheren, dass $t_{16} \equiv t_{19}$, $t_{20} \equiv_{26}$, $t_{22} \equiv t_{25}$, so dass also zweien Gegenecken des vollständigen Vierseits die nämliche Doppeltangente entspricht. Wählt man eine solche Doppeltangente als v, so gehört ihr eine $U_v$ zu, welche aus drei Punkten besteht nämlich aus dem Doppelpunkt und dem zu der Doppeltangente gehörigen Paar von Gegenecken des vollständigen Vierseits. Es gibt daher drei Kurven 3. Klasse $U_v$, welche in drei Punkte zerfallen, und der Doppelpunkt ist Bestandteil einer jeden dieser drei Kurven. Da die Kurve $F_{1,0}$ noch 18 Inflexionstangenten besitzt, so hat man in diesem Falle 18 Kurven $U_v$ mit Inflexionstangente.

Im Falle der Kurve $F_{2,0}$ mit Doppelpunkten in 1 und 2 laufen durch 1 die drei Grundstrahlen $g_2$, $g_3$, $g_4$, durch 2 die drei Grundstrahlen $g_1$, $g_3$, $g_5$, während $g_6$ und $g_7$ weder durch 1 noch durch 2 gehen. Betrachtet man einen der beiden nicht durch einen Doppelpunkt gehenden Grundstrahlen als v, so entspricht demselben eine $U_v$, welche dem Grundstrahl zur Doppeltangente hat, wobei letztere die Kurve $U_v$ und die Kurve $F_{2,3}$ in den beiden nämlichen Punkten berührt. Dem durch die beiden Doppelpunkte laufenden Grundstrahl $g_3$, als v genommen, entspricht eine $U_v$, die in drei Punkte zerfällt. Denn da $g_3$ mit $F_{2,0}$ und $U_v$ die gleichen Berührungspunkte haben muss, so sind die beiden Doppelpunkte Bestandteile der Kurve $U_v$, und da letztere auch die Grundstrahlen $g_6$ und $g_7$ als Tangenten haben muss, so kann der dritte Punkt nur der Schnittpunkt der Grundstrahlen $g_6$ und $g_7$ sein. Den übrigen vier Grundstrahlen, als v genommen, entsprechen Kurven $U_v$, welche aus dem Doppelpunkt, durch den v geht, und einem Kegelschnitt

bestehen, welcher von den vier nicht durch diesen Doppelpunkt gehenden Grundstrahlen berührt wird. Desgleichen berührt der als v gewählte Grundstrahl den Kegelschnitt und zwar in dem Punkte, in welchem er die Kurve $F_{2,0}$ zum zweiten Male berührt.

Man hat nach Tabelle II sechs Doppeltangenten, die nicht Grundstrahlen sind und nicht durch einen Doppelpunkt gehen. Einer solchen Doppeltangente, als v betrachtet, gehört eine $U_v$ zu, welche zerfällt in den Schnittpunkt der beiden zur Doppeltangente gehörigen Grundstrahlen und einen Kegelschnitt, der von den fünf anderen Grundstrahlen und der Doppeltangente berührt wird. Doppeltangenten, welche nicht Grundstrahlen sind, aber durch einen Doppelpunkt gehen, sind $t_{15}$, $t_{18}$, $t_{21}$, $t_{24}$ (durch 1) und $t_{16}$, $t_{19}$, $t_{20}$, $t_{26}$ (durch 2), wobei $t_{15} \equiv t_{18}$, $t_{21} \equiv t_{24}$, $t_{16} \equiv t_{19}$ und $t_{20} \equiv t_{26}$. Wie aus Tabelle II ersichtlich ist, gehört z. B. die durch 1 gehende Doppeltangente $t_{15}$ zum Schnittpunkte von $g_6$ mit dem durch 2 gehenden Grundstrahl $g_5$, während die gleiche Doppeltangente unter der Bezeichnung $t_{18}$ zum Schnittpunkt von $g_7$ mit dem andern durch 2 gehenden Grundstrahl $g_1$ gehört. Man erhält so folgendes Schema:

Durch Punkt 1:

$[g_6, g_5] \ldots\ldots t_{15}$
$[g_7, g_1] \ldots\ldots t_{18}$ ) I. Doppeltangente.

$[g_6, g_1] \ldots\ldots t_{24}$
$[g_7, g_5] \ldots\ldots t_{21}$ ) II. Doppeltangente.

Durch Punkt 2:

$[g_6, g_4] \ldots\ldots t_{16}$
$[g_7, g_2] \ldots\ldots t_{19}$ ) III. Doppeltangente.

$[g_6, g_2] \ldots\ldots t_{26}$
$[g_7, g_4] \ldots\ldots t_{20}$ ) IV. Doppeltangente.

Wählt man eine dieser vier Doppeltangenten als

Gerade v, so zerfällt die zugehörige $U_v$ in drei Punkte. Der eine derselben ist der Doppelpunkt, durch welchen die gewählte Doppeltangente geht, die zwei anderen Punkte sind die Schnittpunkte der zwei Grundstrahlenpaare, welche den beiden möglichen Bezeichnungen der Doppeltangenten entsprechen. Die Kurve $U_v$ hat alle Grundstrahlen zu Tangenten, wie es sein muss. Den 12 Inflexionstangenten von $F_{2,0}$ entsprechen 12 Kurven $U_v$ mit Inflexionstangente.

Besitzt die Kurve 4. O. Doppelpunkte in 1, 2 und 3, so gehen durch 1 die Grundstrahlen $g_2$, $g_3$, $g_4$, durch 2 die Grundstrahlen $g_1$, $g_3$, $g_5$, durch 3 die Grundstrahlen $g_1$, $g_2$, $g_6$. Der Grundstrahl $g_7$ geht durch keinen Doppelpunkt. Nimmt man $g_7$ als v, so hat man eine nicht zerfallende Kurve $U_v$, welche von den sechs übrigen Grundstrahlen einfach berührt wird, während $g_7$ die Kurve $U_v$ und die Kurve $F_{3,0}$ in den beiden nämlichen Punkten berührt. Den drei Grundstrahlen $g_1$, $g_2$ und $g_3$, welche durch zwei Doppelpunkte laufen, entsprechen, als Gerade v genommen, Kurven $U_v$, welche in die beiden Doppelpunkte und den Schnittpunkt von $g_7$ mit dem durch den dritten Doppelpunkt gehenden Grundstrahl zerfallen. Nur durch einen Doppelpunkt gehen $g_4$, $g_5$ und $g_6$. Die einem solchen Grundstrahl zugehörige Kurve $U_v$ zerfällt in den Doppelpunkt und einen Kegelschnitt, der von dem gewählten Grundstrahl in dem gleichen Punkt berührt wird, in welchem der Grundstrahl die Kurve $F_{3,0}$ zum zweiten Male berührt. Desgleichen sind die übrigen nicht durch den Doppelpunkt gehenden vier Grundstrahlen Tangenten des Kegelschnitts.

Die Anzahl der durch keinen Doppelpunkt laufenden Doppeltangenten der Kurve $F_{3,0}$ ist drei, ihnen entsprechen als Geraden v Kurven $U_v$, welche

aus dem Schnittpunkte der zu v gehörigen beiden Grundstrahlen und einem Kegelschnitt bestehen, welcher die übrigen fünf Grundstrahlen und die als v gewählte Doppeltangente zu Tangenten hat. Doppeltangenten, die nicht Grundstrahlen sind, aber durch einen Doppelpunkt gehen, sind $t_{14} \equiv t_{17}$ (durch 3), $t_{15} \equiv t_{18}$ (durch 1), und $t_{16} \equiv t_{19}$ (durch 2). Man hat also drei derartige Doppeltangenten. Als v betrachtet bestimmt eine solche Doppeltangente eine Kurve $U_v$, welche in drei Punkte zerfällt. Der eine derselben ist der Doppelpunkt, durch welchen die gewählte Doppeltangente geht, die zwei andern Punkte sind die Schnittpunkte der Grundstrahlenpaare, welche den beiden möglichen Bezeichnungen der Doppeltangente entsprechen. Den sechs Inflexionspunkten der Kurve $F_{3,0}$ entsprechen sechs Kurven $U_v$ mit Inflexionstangente.

## § 15.

### Die Kurven $U_v$ bei Kurven 4. O. mit Spitzen oder mit Doppelpunkten und Spitzen.

Für eine Kurve $F_{0,1}$ mit Spitze in 2 gehen die vier Grundstrahlen $g_1$, $g_3$, $g_5$, $g_6$ durch die Spitze, wobei $g_6$ mit $g_1$ zusammenfällt. Den nicht durch die Spitze gehenden drei Grundstrahlen entsprechen Kurven $U_v$, welche den als v betrachteten Grundstrahl zur Doppeltangente haben, wobei deren Berührungspunkte mit $U_v$ und mit $F_{0,1}$ die nämlichen sind. Die Gerade $x_1 = 0$ zählt zwar als Grundstrahl doppelt, als Tangente der Kurve $U_v$ aber nur einfach, so dass von der Spitze in der Tat drei Tangenten an die Kurve 3. Klasse gehen, wie es sein muss. Daraus folgt nun auch, dass von den durch eine Spitze gehenden Grundstrahlen wenigstens ein Paar zusammenfallen muss; denn da die Grundstrahlen Tangenten aller Kurven $U_v$ sind, so würden

von einem Punkt vier Tangenten an eine Kurve 3. Klasse gehen, was nicht möglich ist. Dem durch die Spitze gehenden Doppelgrundstrahl ist eine $U_v$ zugeordnet, welche in die Spitze und einen Kegelschnitt zerfällt. Letzterer hat die drei nicht durch die Spitze gehenden Grundstrahlen zu Tangenten und wird ausserdem von dem Doppelgrundstrahl in dem nämlichen Punkte berührt, in welchem derselbe die Kurve $F_{0,1}$ berührt. Die andere Doppeltangente der zerfallenen Kurve 3. Klasse ist die zweite von der Spitze an den Kegelschnitt mögliche Tangente. Einem der zwei anderen durch die Spitze laufenden Grundstrahlen entspricht eine Kurve $U_v$ welche in die Spitze und einen Kegelschnitt zerfällt, der wie vorhin von dem gewählten Grundstrahl und den drei nicht durch die Spitze gehenden Grundstrahlen berührt wird. Die zweite Doppeltangente der zerfallenen Kurve 3. Klasse ist aber in diesen beiden Fällen der Doppelgrundstrahl. Denn wählt man z.B. $x_3 = 0$ als v, so besteht $U_v$ aus dem Punkt $u_2 = 0$ und dem Kegelschnitt $(a_2 - b_1)\ u_1\ u_3 - a_1\ u_2\ u_3 - c_1\ u_1\ u_2 = 0$; die Kegelschnittgleichung wird aber für $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ identisch erfüllt. Das Analoge ergibt sich für den Grundstrahl $g_5$. Da die Gerade $x_1 = 0$ als Doppeltangente von $U_v$ nur einfach zählt, so ist die Spitze als Berührungspunkt des Grundstrahls $g_1$ mit $U_v$, und der Berührungspunkt von $x_1 = 0$ mit dem Kegelschnitt als Berührungspunkt des Grundstrahls $g_6$ mit $U_v$ zu betrachten. Den sechs Schnittpunkten der Grundstrahlen $g_3$ und $g_5$ mit den nicht durch die Spitze gehenden drei Grundstrahlen entsprechen sechs wahre Doppeltangenten der Kurve $F_{0,1}$. Betrachtet man eine solche Doppeltangente als v, so zerfällt die zugeordnete $U_v$ in den Schnittpunkt des zu der Doppeltangente gehörigen Grundstrahlenpaares und den von der Dop-

peltangente und den übrigen Grundstrahlen berührten Kegelschnitt. Dasselbe gilt für die Doppeltangente $t_{24}$, welche mit dem Doppelgrundstrahl eine Kurve $X_y$ bilde.. Durch die zu $t_{24}$ gehörige Kurve $U_v$ ist also der als y zu betrachtende Punkt des Doppelgrundstrahls bestimmt. Von den durch die Spitze gehenden Doppeltangenten sind dreimal je drei identisch. Man hat demnach drei Kurven $U_v$, welche in 3 Punkte zerfallen. Sie werden gebildet von der Spitze, von einer Ecke des Dreiseits, welches die drei nicht durch die Spitze gehenden Grundstrahlen bestimmen, und dem Schnittpunkt der Gegenseite der gewählten Ecke mit dem Doppelgrundstrahl. Die 16 Inflexionstangenten von $F_{0,1}$ bestimmen 16 Kurven $U_v$ mit Inflexionstangente.

Bei Betrachtung der noch vorhandenen Fälle können wir uns kurz fassen. Dem Grundstrahl $g_7$, der in der Reihe der früher behandelten Kurven 4. O. nie durch einen singulären Punkt geht, entspricht in jedem Falle eine nicht zerfallende Kurve $U_v$. Grundstrahlen, die durch einen singulären Punkt gehen, bestimmen Kurven $U_v$, welche in den singulären Punkt und einen Kegelschnitt zerfallen. Grundstrahlen durch zwei singuläre Punkte bestimmen Kurven $U_v$, welche in die beiden singulären Punkte, durch welche der Grundstrahl geht, und einen dritten Punkt zerfallen, der sowohl durch Vergleich der analogen Kurven ohne Spitze als auch analytisch leicht angegeben werden kann. Doppeltangenten, die nicht Grundstrahlen sind und durch keinen singulären Punkt gehen, gibt es für die Kurve $F_{1,1}$ drei, für die Kurve $F_{2,1}$ eine, für die übrigen Kurven mit Spitzen keine. Eine solche Doppeltangente bestimmt eine Kurve $U_v$, die in einen Punkt und einen Kegelschnitt zerfällt. Den übrigen Doppeltangenten gehören Kurven $U_v$ zu, die in drei Punkte zerfallen,

welche unschwer anzugeben sind. Kurven $U_\nu$ m. Inflexionstangente gibt es bei der Kurve $F_{1,1}$ zehn, bei der Kurve $F_{0,2}$ acht, bei der Kurve $F_{2,1}$ vier, bei der Kurve $F_{1,2}$ zwei und bei der Kurve $F_{0,3}$ keine.

# V. Die vierfach berührenden Kegelschnitte.

## § 16.

### Allgemeines.

Es wurde gezeigt, dass die Kurve $X_y = 0$ für ein auf einem Grundstrahl liegendes y in den Grundstrahl selbst und einen Kegelschnitt zerfällt, der die Kurve 4. O F in vier Punkten berührt. Zu den Punkten eines Grundstrahls gehört also eine ganze Reihe von Kegelschnitten, die alle mit F eine vierfache Berührung besitzen.

Der auf dem Grundstrahl $x_1 = 0$ liegende Punkt y hat die Coordinaten $0, y_2, y_3$. Für die zugehörige $X_y$ hat man dann also $u_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$, $u_2 = -x_1 y_3$, $u_3 = x_1 y_2$ in die allgemeine Connexgleichung einzusetzen und bekommt:

$$X_y \equiv a_x x_1^2 y_2 y_3 + b_x x_1 y_2 (x_2 y_3 - x_3 y_2) - c_x x_1 y_3 (x_2 y_3 - x_3 y_2) = 0.$$

Daraus erhält man durch Division mit $x_1$ die Gleichung des zu y gehörigen Kegelschnitts. Um seine Schnittpunkte mit $x_1 = 0$ zu finden, hat man in dieser Kegelschnittsgleichung $x_1 = 0$ zu setzen und erhält:

$$(b_2 x_2 + b_3 x_3) y_2 (x_2 y_3 - x_3 y_2) - (c_2 x_2 + c_3 x_3) y_3 (x_2 y_3 - x_3 y_2) = 0.$$

Daraus bekommt man die Gleichungen $x_2 y_3 - x_3 y_2 = 0$ und $(b_2 x_2 + b_3 x_3) y_2 - (c_2 x_2 + c_3 x_3) y_3 = 0$.

Die erste sagt nichts Neues aus, die zweite gibt einen linearen Zusammenhang zwischen den beiden Schnittpunkten, d.h. die zu den Punkten eines Grundstrahls gehörigen vierfach berührenden Kegelschnitte er-

zeugen auf dem Grundstrahl zwei projektive Punktreihen.

Die acht Berührungspunkte zweier zu einem Grundstrahl gehörigen Kegelschnitte mit der Kurve F liegen immer in einem Kegelschnitt, was sogleich bewiesen wird. Zwei Kurven $X_y$ und $X_z$ schneiden sich in neun Punkten, von welchen einer der zur Verbindungslinie $\overline{yz}$ gehörige Coincidenzpunkt ist. Von jedem der acht übrigen Schnittpunkte geht ein Strahl nach y und einer nach z. Wenn nun z auf $\overline{yz}$ beliebig nahe an y heranrückt, so bleibt der auf $\overline{yz}$ gelegene Schnittpunkt fest, die übrigen acht wandern auf $X_y$ und ihre Verbindungsstrahlen mit y und z vereinigen sich schliesslich zu Doppelstrahlen, also zu Tangenten von $\Phi=0$. Da es von y an $\Phi=0$ nur sechs Tangenten gibt, so gibt es auf $X_y$ nur sechs getrennt liegende Schnittpunkte, die übrigen zwei fallen nach y. Die genannten sechs Schnittpunkte sind aber, wie erinnerlich, die Berührungspunkte von $X_y$ mit F. Man erhält daher dieselben, wenn man die Schnittpunkte von $X_y = 0$ und $X_y + \varepsilon_z = 0$ sucht, sobald $\varepsilon$ beliebig klein wird. Benützt man vorübergehend die symbolische Bezeichnungsweise, so erhält man wie früher aus der Connexgleichung $a_x u_\alpha{}^2 = 0$ für $X_y$ die Gleichung $X_y \equiv a_x (xy\alpha)^2 = 0$.

Dann ist:

$$X_y + \varepsilon_z \equiv X_y + 2\varepsilon\, a_x\, (xy\alpha)\, (xz\alpha) + \varepsilon^2 X_z = 0. \quad 1.)$$

Für sehr kleine $\varepsilon$ verschwindet $\varepsilon^2$ gegen $\varepsilon$. Die Kurven

$$X_y \equiv a_x (xy\alpha)^2 = 0 \text{ und}$$
$$X_{y,z} \equiv a_x (xy\alpha)(xz\alpha) = 0 \quad 2.)$$

schneiden sich dann im Coincidenzpunkt von $\overline{yz}$ und in y, welcher Punkt als Doppelpunkt von $X_y$ doppelt zu rechnen ist. Die übrigen sechs Schnittpunkte sind die Berührungspunkte von $X_y$ mit F. Vertauscht man in den Gleichungen 2) y und z, so sieht man, dass

zwischen den Kurven $X_{y,z}$ und $X_z$ der gleiche Zusammenhang besteht wie zwischen $X_{y,z}$ und $X_y$, $X_{y,z}$ geht also auch durch die Berührungspunkte von $X_z$ mit F. Durch die Berührungspunkte zweier Kurven $X_y$ und $X_z$ lässt sich also immer eine Kurve 3. O. $X_{y,z} \equiv a_x (xy\alpha) (xz\alpha) = 0$ hindurchlegen. Liegen die Punkte y und z auf einem Grundstrahl g, so zerfallen die Kurven $X_y$ und $X_z$ je in einen Kegelschnitt und den Grundstrahl. Die beiden Kegelschnitte haben mit F zusammen acht Berührungspunkte, die beiden Berührungspunkte auf g sind also doppelt zu zählen. Da die Berührungspunkte auch auf der Kurve $X_{y,z}$ liegen, so würde diese von einer Geraden in vier Punkten geschnitten, es muss also g Bestandteil von $X_{y,z}$ sein, d. h. $X_{y,z}$ zerfällt ebenfalls in einen Kegelschnitt und den Grundstrahl g. Daraus folgt dann weiter, dass dieser Kegelschnitt durch die acht Berührungspunkte der zu y und z gehörigen Kegelschnitte geht.

Ein Grundstrahl schneidet die übrigen sechs Grundstrahlen in sechs Punkten, und zu einem solchen Punkt gehört ein Kegelschnitt, der aus dem geschnittenen Grundstrahl und einer weiteren Doppeltangente besteht. Die den Punkten eines Grundstrahls zugehörigen vierfach berührenden Kegelschnitte enthalten also sechs, welche in Doppeltangentenpaare zerfallen, und die acht Berührungspunkte irgend zweier solcher Paare liegen ebenfalls auf einem Kegelschnitt. Nun kann man aber von den 28 Doppeltangenten einer gegebenen Kurve 4. O. irgend sieben als Grundstrahlen einer Haupteoincidenz auswählen und von diesen Grundstrahlen das Gleiche beweisen. Jedes Paar von Doppeltangenten einer Kurve 4. O. bildet also mit fünf anderen Paaren ein System von sechs Paaren, für welche die Berührungspunkte irgend zweier dieser Paare auf einem Kegelschnitt liegen. Da die 28

Doppeltangenten $\frac{1}{2}$. 28 . 27 = 378 solcher Paare ergeben, so hat man 63 Systeme von vierfach berührenden Kegelschnitten, von welchen sechs in jedem System in ein Doppeltangentenpaar zerfallen.

## § 17.

### Die Systeme der allgemeinen Kurve 4. O. in symbolischer Darstellung.

Die Einführung der Symbole 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 gestattet nach dem Beispiele Hesses, die 28 Doppeltangenten durch die 28 Combinationen zu zweien, welche die acht Symbole erlauben, darzustellen. 12, 34, 56, 78 bedeuten dann Doppeltangenten, deren acht Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen, und diese Bezeichnung ermöglicht es, die 63 Systeme der die Kurve F vierfach berührenden Kegelschnitte zu bestimmen. Man kann zunächst, wie wir sehen werden, 35 Systeme vom Typus 1234, 5678 angeben. Die zum System 1234, 5678 gehörigen zerfallenden Kegelschnitte sind gegeben durch die sechs Paare von Doppeltangenten:

(12,34), (13,24), (14,23);
(56,78), (57,68), (58,67).

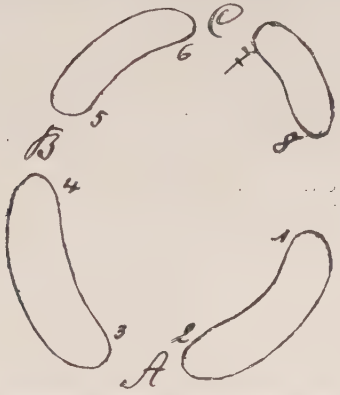
Ferner lassen sich 28 Systeme vom Typus 12,345678 angeben. Die zum System 12,345678 gehörigen zerfallenden Kegelschnitte sind gegeben durch die sechs Paare von Doppeltangenten:

(13,23), (14,24), (15,25);
(16,26), (17,27), (18,28).

Damit ist die Gesamtzahl der Systeme $35 + 28 = 63$, wie es sein muss. Um ihre Anzahl auf $64 = 2^6$ zu bringen, sei ein scheinbares System mit der Bezeichnung 12345678 eingeführt.

Wir gehen von einer aus vier Menisken bestehenden Kurve 4. O. aus, wie sie Plücker für seine Un-

tersuchungen angab. Die Figur veranschaulicht die auf




einem Kegelschnitt gelegenen Berührungspunkte der Doppeltangenten 12, 34, 56, 78. Sobald sich die beiden Punkte 2 und 3 vereinigen, bekommt die Kurve 4. O. in A einen Doppelpunkt und es werden dann zwei Systeme, die sich in der Bezeichnung nur durch den Wechsel der Ziffern 2 und 3 unterscheiden, identisch, während die Doppeltangente 23 fortbesteht. Bei einem Doppelpunkt in B gilt das Gleiche für die Ziffern 4 und5, bei einem Doppelpunkt in C für die Ziffern 6 und 7. Wird der Doppelpunkt in A zur Spitze, so verschwindet der Meniskus 12 völlig, und die Systeme, welche sich nur durch den Wechsel von irgend zweien der Ziffern 1, 2, 3 unterscheiden, sind identisch, wobei 12, 23, 31 eine vom Rückkehrpunkt kommende Tangente bezeichnet. Das Analoge gilt für C. Auf den Fall der Kurve 4.O.mit drei Spitzen muss verzichtet werden, da die acht Ziffern nicht mehr genügen.

Die 64 Systeme der allgemeinen Kurve 4. O. lassen sich, wie Tabelle VII zeigt, in acht Gruppen von je acht Systemen einteilen. Massgebend für die Zusammenstellung soll hierbei sein, wie das Komma in den

Systemsymbolen die Ziffern 2 und 3, 4 und 5, 6 und 7 trennt, da durch deren Wechsel für Doppelpunkte identische Systeme entstehen. Die erste mit g bezeichnete Gruppe enthält die Systeme, in welchen für keines der genannten drei Ziffernpaare eine Trennung durch das Komma eintritt; ihr ist auch das scheinbare System 12345678 zugeteilt. Die Gruppe a enthält die Systeme, in welchen das Komma die Ziffern 2 und 3 trennt. In der Gruppe b trennt das Komma die Ziffern 4 und 5, in der Gruppe c die Ziffern 6 und 7. Die Bezeichnungen bc, ac, ab der nächsten drei Gruppen sagen aus, dass durch das Komma immer jene Ziffernpaare getrennt werden, welche den beiden Buchstaben entsprechen, während das dem fehlenden Buchstaben entsprechende Ziffernpaar nicht getrennt wird. In der Gruppe ab z. B. werden die Ziffern 2 und 3, ebenso 4 und 5 getrennt, 6 und 7 dagegen nicht. In der letzten Gruppe abc sind alle drei Ziffernpaare getrennt. Die Klammerzeichen [ ] der Tabelle VII seien zunächst ausser acht gelassen, da ihre Bedeutung später erklärt wird.

## § 18.

### Die Systeme der Kurven 4. O. mit Doppelpunkten.

Hat die Kurve 4. O. in A einen Doppelpunkt, so schneiden die sechs zerfallenen Kegelschnitte des Systems 1245, 3678 im Punkte A. Dann lässt sich aber zeigen, dass alle Kegelschnitte des Systems durch A gehen. Denn bedeuten $U=0$, $V=0$, $W=0$ drei Kegelschnitte eines Systems, so kann man die Kurve F in der Form

$$l\sqrt{U} + m\sqrt{V} - n\sqrt{W} = 0$$

darstellen, während ein Kegelschnitt des Systems die allgemeine Gleichung

$$\lambda U + \mu V + \nu W = 0$$

besitzt. Die Bedingung, unter welcher

$$l\sqrt{U} + m\sqrt{V} + n\sqrt{W} = 0$$

vom $\lambda U + \mu V + \nu W = 0$ berührt wird, ist dann

$$\frac{l^2}{\lambda} + \frac{m^2}{\mu} + \frac{n^2}{\nu} = 0$$

Es sind demnach unter den einhüllenden Kegelschnitten jetzt solche vorhanden, welche durch den Doppelpunkt gehen und daher noch drei Berührungen mit der Kurve 4. O. besitzen. Die Kegelschnitte, welche durch A gehen, sind die jener Gruppen, deren Bezeichnung den Buchstaben a enthält, womit ja die Trennung der Ziffern 2 und 3 durch das Komma ausgedrückt ist. Man hat 32 Systeme derartiger Kegelschnitte. Da aber immer zwei Systeme, die sich nur durch den Wechsel der Ziffern 2 und 3 unterscheiden, identisch sind, so hat man in Wirklichkeit 16 Doppelsysteme, von denen also jedes zweimal zählt, und diese Systeme sind in der Tabelle leicht zu erkennen. Dagegen sind alle Systeme von vierfach berührenden Kegelschnitten in jenen Gruppen enthalten, in deren Bezeichnung der Buchstabe a fehlt. Dabei ist jedoch Rücksicht auf die scheinbaren Systeme zu nehmen. Das System 12345678 der Gruppe g wurde von vornherein als scheinbares System eingeführt, gebildet von allen Geraden der Ebene, jede doppelt gezählt. Für einen Doppelpunkt in A wird nun aber auch das System 23,145678 derselben Gruppe zu einem scheinbaren, indem die sechs zerfallenden Kegelschnitte dieses Systems von A ausgehende Doppelgerade werden. Die Zahl der Systeme von vierfach berührenden Kegelschnitten vermindert sich daher um diese beiden weiteren Systeme und man hat daher den Satz: „Es gibt 30 Systeme

von Kegelschnitten, welche eine Kurve 4. O. mit einem Doppelpunkt in vier Punkten berühren".

Hat die Kurve 4. O. Doppelpunkte in A und B, so existieren acht Systeme, deren Kegelschnitte dreifach berühren und durch A gehen, und ebenso acht Systeme, deren Kegelschnitte dreifach berühren und durch B gehen, wobei jedes System doppelt zählt, ferner vier Systeme von Kegelschnitten, welche zweifach berühren und durch A und B gehen, wobei jedes System vierfach zählt. Die Systeme der vierfach berührenden Kegelschnitte werden in diesem Falle durch jene Gruppen gegeben, in deren Bezeichnung die Buchstaben a und b nicht vorkommen. Derartige Systeme hat man 16, von welchen aber noch die scheinbaren Systeme abzuziehen sind. Es sind dies die vorhin genannten Systeme 12345678 und 23,145678, sowie das System 45, 123678, welch letzteres aus Doppelgeraden besteht, die durch B gehen.

Besitzt die Kurve 4. O. Doppelpunkte in A, B und C, so ergeben sich vier Systeme, deren Kegelschnitte dreifach berühren und durch A gehen, vier Systeme, deren Kegelschnitte dreifach berühren und durch B gehen, und vier Systeme, deren Kegelschnitte dreifach berühren und durch C gehen, wobei jedes System doppelt zählt, ferner je zwei Systeme, deren Kegelschnitte zweifach berühren und durch A und B bezw. durch B und C bezw. durch A und C gehen, wobei jedes System vierfach zählt, endlich ein System, dessen Kegelschnitte einfach berühren und durch A, B und C gehen, wobei das System achtfach zählt. Für die Systeme der vierfach berührenden Kegelschnitte kommt nurmehr die Gruppe g in Betracht, aus welcher die vier Systeme 12345678, 23,145678, 45, 123678 und 67.123458 als scheinbare Systeme ausscheiden.

## § 19.

### Die Systeme der Kurven 4. O. mit Spitzen sowie der Kurven mit Doppelpunkten und Spitzen.

Die Symbole 1 bis 8 lassen sich auch zur Darstellung der Kegelschnittsysteme von Kurven 4. O. mit Spitzen anwenden, den Fall der Kurve mit drei Spitzen ausgenommen. Ist A Spitze der Kurve 4. O., so sind die durch A gehenden Kegelschnitte durch jene Systeme gegeben, für welche die Ziffern 1,2 und 3 nicht auf ein und derselben Seite des Kommas stehen. In der Tabelle VII sind diese Systeme durch ein links von der Bezeichnung angebrachtes Klammerzeichen hervorgehoben und man erkennt, dass die Systeme der Gruppen a, ab, ac, abc unter diesen Systemen sich befinden müssen. Ebenso sind die durch eine Spitze in C gehenden Kegelschnitte durch die Systeme gegeben, für welche die Ziffern 6,7 und 8 nicht auf ein und derselben Seite des Kommas stehen .Diese Systeme sind in der Tabelle an dem rechts von der Bezeichnung stehenden Klammerzeichen erkennbar. Ist A Doppelpunkt, so hat man 16 Doppelsysteme von Kegelschnitten, die dreifach berühren und durch A gehen. Wird nun A zur Spitze, so sind alle Systeme identisch, welche sich nur durch den Wechsel von irgend zweien der Ziffern 1,2 und 3 unterscheiden. Die Systeme 12,345678 u. 13,245678 der Gruppe a werden demnach mit dem scheinbaren System 23.145678 identisch, die übrigen 15 Doppelsysteme der Gruppen a, ac, ab, abc bestehen fort. Jedes der 15 einfachen Systeme, die in den Gruppen g, b, c, bc, mit der links stehenden Klammer bezeichnet sind, wird aber einem der 15 Doppelsysteme identisch, so dass man 15 dreifache Systeme von Kegelschnitten hat, die dreifach berühren und durch die Spitze gehen. Man hat daher

15 Systeme von Kegelschnitten, welche eine Kurve 4. O. mit Spitze in vier Punkten berühren.

Für eine Kurve 4.O. mit Spitze in A und Doppelpunkt in C ergeben sich die Systeme der Kegelschnitte durch A aus den Gruppen a und ab, jener durch C aus den Gruppen c und bc, und jener durch A und C aus den Gruppen ac und abc, wobei die links stehenden Klammerzeichen zu beachten sind. Man findet sieben Systeme von Kegelschnitten, die dreifach berühren und durch die Spitze gehen, wobei jedes System dreifach zählt, ferner vier Systeme von Kegelschnitten, die dreifach berühren und durch den Doppelpunkt gehen, wobei jedes System doppelt zählt, schliesslich vier Systeme von Kegelschnitten, welche zweifach berühren und durch die Spitze und den Doppelpunkt gehen, wobei jedes System sechsfach zählt. Als scheinbare Systeme erkennt man 12345678, ferner die identischen Systeme 23,145678; 12,345678; 13, 245678 bestehend aus Doppelgeraden durch die Spitze, sowie das System 67,123458 bestehend aus Doppelgeraden durch den Doppelpunkt. Es gibt daher sechs Systeme von Kegelschnitten, welche eine Kurve 4. O. mit Doppelpunkt und Spitze in vier Punkten berühren.

Hat die Kurve 4. O. Spitzen in A und C, so ergeben sich drei Systeme von Kegelschnitten, die dreifach berühren und durch A gehen, wobei jedes System dreifach zählt, ferner drei Systeme von Kegelschnitten, die dreifach berühren und durch C gehen, wobei jedes System dreifach zählt, schliesslich vier Systeme von Kegelschnitten, welche zweifach berühren und durch beide Spitzen gehen, wobei jedes System neunfach zählt. Zu den scheinbaren Systemen des vorigen Falles treten die Systeme 68,123457 und 78,123456 hinzu, die mit 67,123458 identisch sind und aus Doppelgeraden durch C bestehen.

Man hat also noch drei Systeme von Kegelschnitten, welche die Kurve 4. O. mit zwei Spitzen in vier Punkten berühren.

Hat die Kurve 4. O. in A eine Spitze, in B und C Doppelpunkte ,so bekommt man: Drei Systeme von Kegelschnitten, die dreifach berühren und durch A gehen, wobei jedes System dreifach zählt; zwei Systeme von Kegelschnitten, die dreifach berühren und durch B gehen, ebenso zwei Systeme von Kegelschnitten, die dreifach berühren und durch C gehen, wobei jedes System doppelt zählt; ferner zwei Systeme von Kegelschnitten, die zweifach berühren und durch A und B gehen, ebenso zwei Systeme von Kegelschnitten, die zweifach berühren und durch A und C gehen, wobei jedes System sechsfach zählt; endlich ein System von Kegelschnitten, welche zweifach berühren und durch B und C gehen, wobei das System vierfach zählt, und ein System von Kegelschnitten, die einfach berühren und durch A, B und C gehen, wobei das System zwölffach zählt. Scheinbare Systeme sind: 12345678; 23,145678 ≡ 12,345678 ≡ 13,245678; 45,123678 und 67,123458. Es gibt demnach nur ein System von Kegelschnitten, welche die Kurve 4. O. mit einer Spitze und zwei Doppelpunkten in vier Punkten berühren. Es ist dies das System 1238, 4567.

Hat endlich die Kurve 4. O. Spitzen in A und C, und einen Doppelpunkt in B, so findet man: Ein System von Kegelschnitten, die dreifach berühren und durch A gehen sowie ein System von Kegelschnitten, die dreifach berühren und durch C gehen, wobei jedes System dreifach zählt; ein System von Kegelschnitten, die dreifach berühren und durch B gehen, welches System doppelt zählt; ein System von Kegelschnitten, die zweifach berühren und durch A und B gehen sowie ein Sy-

stem von Kegelschnitten, die zweifach berühren und durch B und C gehen, wobei jedes System sechsfach zählt; zwei Systeme von Kegelschnitten, die zweifach berühren und durch A und C gehen, wobei jedes System neunfach zählt; schliesslich ein System von Kegelschnitten, die einfach berühren und durch A, B und C gehen, welches System achtzehnfach zählt. Scheinbare Systeme existieren acht. Für die Kurve 4. O. mit zwei Spitzen und einem Doppelpunkt gibt es daher keine vierfach berührenden Kegelschnitte.

## § 20.
### Die allgemeine Formel.

Die angestellten Ueberlegungen führen zu einer allgemeinen Formel. Wenn die Kurve 4. O. $\delta$ Doppelpunkte hat, so soll die Anzahl der Systeme von Kegelschnitten bestimmt werden, welche durch $m'$ Doppelpunkte gehen und mit der Kurve noch $m$ wirkliche Berührungen haben, wobei $m + m' = 4$. Wir erinnern uns der Bedeutung der Buchstaben a, b und c in der Bezeichnung der Gruppen. Den Stellen ohne Doppelpunkt entsprechen $3\text{-}\delta$ Buchstaben, und diese $3\text{-}\delta$ Buchstaben sind die einzigen, welche in der Bezeichnung der gesuchten Gruppen die den $m'$ Doppelpunkten entsprechenden Buchstaben begleiten können. Die Zahl der Gruppen, welchen die durch $m'$ Doppelpunkte gehenden Kegelschnittsysteme angehören, ist $2^{3-\delta}$, wie man leicht bestätigt. Da jede Gruppe $2^3$ Systeme enthält und in ein und derselben Gruppe jedes System $2^{m'}$ mal vorkommt, so ist die Anzahl der verschiedenen Systeme von Kegelschnitten, welche durch $m'$ der $\delta$ Doppelpunkte gehen, gegeben durch:

$$n = 2^{6-\delta-m'}$$

Zu den $\delta$ Doppelpunkten der Kurve 4. O. mögen nun noch $\varkappa$ Spitzen hinzutreten. Systeme von Kegelschnitten, welche durch $m''$ Spitzen gehen, haben dabei den Vielfältigkeitsgrad $3^{m''}$. Dann bestätigt man mit Hilfe der Tabelle VII leicht die Zahl:

$$2^{6-\delta-2\varkappa-m'} \cdot 2^{m'} \cdot 3^{m''} \text{ oder } 2^{6-\delta-2\varkappa} \cdot 3^{m''},$$

welche unter Berücksichtigung des Vielfältigkeitsgrades und der scheinbaren Systeme die Zahl der Systeme von Kegelschnitten angibt, welche durch $m'$ Doppelpunkte und $m''$ Spitzen gehen und $m$ wirkliche Berührungen mit der Kurve 4. O. unter der Bedingung $m + m' + m'' = 4$ besitzen. Wir wollen den Durchgang eines Kegelschnitts durch eine Spitze einer wirklichen Berührung gleichstellen und einen solchen Durchgang als „singuläre Berührung" bezeichnen. Wenn man nun den Grad der Vielfältigkeit jedes Systems in Rechnung zieht und die scheinbaren Systeme mitzählt, so gibt die Zahl $2^{6-\delta}$ die Anzahl der Systeme von Kegelschnitten, welche durch $m'$ Doppelpunkte gehen und mit der Kurve noch $4-m'$ gewöhnliche oder singuläre Berührungen haben. Indem man nun $m'$ als fest gegeben voraussetzt, muss man diese Zahl erhalten, wenn man $m$ und $m''$ unter der Bedingung $m + m'' = 4 - m'$ variieren lässt, wobei man hat $m'' = 0$, $m'' = 1$ auf $\varkappa$ Arten, $m'' = 2$ auf $\frac{\varkappa.(\varkappa-1)}{1.2}$ Arten usw. bis zu $m'' = \varkappa$. Man bekommt

$$2^{6-\delta-2\varkappa} \cdot \left[1 + \varkappa \cdot 3 + \frac{\varkappa.(\varkappa-1)}{1.2} \cdot 3^2 + \ldots + 3^{\varkappa}\right]$$
$$= 2^{6-\delta-2\varkappa} \cdot (1+3)^{\varkappa}$$
$$= 2^{6-\delta}, \text{ wie es sein muss.}$$

Lässt man nun noch $m'$ variieren, so muss sich $2^6$ ergeben, und man bekommt in der Tat

$$2^{6-\delta} \cdot \left[1 + \delta + \frac{\delta\,(\delta-1)}{1.2} + \ldots + 1\right] = 2^{6-\delta} \cdot (1+1)^{\delta} = 2^6.$$

Somit lässt sich folgender Satz aufstellen:

Die Anzahl der Systeme von Kegelschnitten, welche durch $m'$ gegebene Doppelpunkte und $m''$ gegebene Spitzen einer Kurve 4. O. mit $\delta$ Doppelpunkten und $\varkappa$ Spitzen gehen und ausserdem m wirkliche Berührungen mit der Kurve unter der Bedingung $m + m' + m'' = 4$ besitzen, ist gegeben durch

$$n = 2^6 - \delta - 2\varkappa - m',$$

wobei für $m = 4$, $m' = 0$, $m'' = 0$ der Term $-(1+\delta)$, für $m = 3$, $m' = 0$, $m'' = 1$ der Term $(-1)$ hinzuzufügen ist. Jedes dieser Systeme zählt für

$$2^{m'} \cdot 3^{m''} \text{ Systeme.}$$

Tabelle I.

## Die Doppeltangenten der Kurve $F_{3,0} = 0$.

| Grundstrahlen | | Bedingungen: |
|---|---|---|
| $x_1 = 0$ | $g_1$ | $a_1 = 0;\ b_2 = 0;\ c_3 = 0$ |
| $x_2 = 0$ | $g_2$ | |
| $x_3 = 0$ | $g_3$ | Abkürzungen: |
| $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ | $g_4$ | $A = a_3 b_1 + a_2 (c_1 - a_3)$ |
| $b_1 x_1 + b_3 x_3 = 0$ | $g_5$ | $B = b_1 c_2 + b_3 (a_2 - b_1)$ |
| $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ | $g_6$ | $C = c_2 a_3 + c_1 (b_3 - c_2)$ |
| $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ | $g_7$ | |

| Grundstrahlenpaare: | | Entsprechende Doppeltangente: |
|---|---|---|
| $x_2 = 0;\ x_3 = 0.$ | $t_8$ | $a_2 x_2 + a_2 x_2 = 0.$ |
| $x_3 = 0;\ x_1 = 0.$ | $t_9$ | $b_3 x_3 + b_1 x_1 = 0.$ |
| $x_1 = 0;\ x_2 = 0.$ | $t_{10}$ | $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0.$ |
| $x_1 = 0;\ a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$ | $t_{11}$ | $Ax_1 + a_2 c_2 x_2 + a_3 b_3 x_3 = 0.$ |
| $x_2 = 0;\ b_3 x_3 + b_1 x_1 = 0.$ | $t_{12}$ | $Bx_2 + b_3 a_3 x_3 + b_1 c_1 x_1 = 0.$ |
| $x_3 = 0;\ c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0.$ | $t_{13}$ | $Cx_3 + c_1 b_1 x_1 + c_2 b_2 x_2 = 0.$ |
| $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0;\ b_3 x_1 + b_2 x_2 = 0.$ | $t_{14}$ | $Ab_1 x_1 + Ba_2 x_2 = 0.$ |
| $b_3 x_3 + b_1 x_1 = 0;\ c_2 x_2 + c_1 x_1 = 0.$ | $t_{15}$ | $Bc_2 x_2 + Cb_3 x_3 = 0.$ |
| $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0;\ a_3 x_3 + a_2 x_2 = 0.$ | $t_{16}$ | $Ca_3 x_3 + Ac_1 x_1 = 0.$ |
| $x_3 = 0;\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0.$ | $t_{17}$ | $Ab_1 x_1 + Ba_2 x_2 = 0.$ |
| $x_1 = 0;\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0.$ | $t_{18}$ | $Bc_2 x_2 + Cb_3 x_3 = 0.$ |
| $x_2 = 0;\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0.$ | $t_{19}$ | $Ca_3 x_3 + Ac_1 x_1 = 0.$ |
| $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0;\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0.$ | $t_{20}$ | $x_1 = 0.$ |
| $b_1 x_1 + b_3 x_3 = 0;\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0.$ | $t_{21}$ | $x_2 = 0.$ |
| $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0;\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0.$ | $t_{22}$ | $x_3 = 0$ |
| $x_1 = 0;\ b_1 x_1 + b_3 x_3 = 0.$ | $t_{23}$ | $x_3 = 0.$ |
| $x_1 = 0;\ c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0.$ | $t_{24}$ | $x_2 = 0.$ |
| $x_2 = 0;\ a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$ | $t_{25}$ | $x_3 = 0.$ |
| $x_2 = 0;\ c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0.$ | $t_{26}$ | $x_1 = 0.$ |
| $x_3 = 0;\ a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$ | $t_{27}$ | $x_2 = 0.$ |
| $x_3 = 0;\ b_1 x_1 + b_3 x = 0.$ | $t_{28}$ | $x_1 = 0.$ |

Tabelle II.

## Die Doppeltangenten der Kurve $F_{2,0} = 0$.

| Grundstrahlen: | Bedingungen: | | | |
|---|---|---|---|---|
| $g_1 = 0$ | | 2 | | |
| $g_2 = 0$ | $a_1 = 0,\ b_2 = 0.$ | 1 | | |
| $g_3 = 0$ | | 1,2 | | |
| $g_4 = 0$ | | 1 | | |
| $g_5 = 0$ | | 2 | | |
| $g_6 = 0$ | | | × | |
| $g_7 = 0$ | | | × | |

| Grundstrahlenpaare: | Entsprech. Doppeltangente: | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g_2 = 0,\ g_3 = 0$ | $t_8 = 0$ | 1 | | | | | | | |
| $g_3 = 0,\ g_1 = 0.$ | $t_9 = 0$ | 2 | | | | | | | |
| $g_1 = 0,\ g_2 = 0.$ | $t_{10} = 0$ | | × | | | | | | |
| $g_1 = 0,\ g_4 = 0.$ | $t_{11} = 0$ | | | × | | | | | |
| $g_2 = 0,\ g_5 = 0.$ | $t_{12} = 0$ | | | | × | | | | |
| $g_3 = 0,\ g_6 = 0.$ | $t_{13} = 0$ | | | | | × | | | |
| $g_4 = 0,\ g_5 = 0.$ | $t_{14} = 0$ | | | | | | × | | |
| $g_5 = 0,\ g_6 = 0.$ | $t_{15} = 0$ | 1 | | | | | | | |
| $g_6 = 0,\ g_4 = 0.$ | $t_{16} = 0$ | 2 | | | | | | | |
| $g_3 = 0,\ g_7 = 0.$ | $t_{17} = 0$ | | | | | | | × | |
| $g_1 = 0,\ g_7 = 0.$ | $t_{18} = 0$ | 1 | | | | | | | |
| $g_2 = 0,\ g_7 = 0.$ | $t_{19} = 0$ | 2 | | | | | | | |
| $g_4 = 0,\ g_7 = 0.$ | $t_{20} = 0$ | 2 | | | | | | | |
| $g_5 = 0,\ g_7 = 0.$ | $t_{21} = 0$ | 1 | | | | | | | |
| $g_6 = 0,\ g_7 = 0.$ | $t_{22} = 0$ | 1,2 | | | | | | | |
| $g_1 = 0,\ g_5 = 0.$ | $t_{23} = 0$ | 1,2 | | | | | | | |
| $g_1 = 0,\ g_6 = 0.$ | $t_{24} = 0$ | 1 | | | | | | | |
| $g_2 = 0,\ g_4 = 0.$ | $t_{25} = 0$ | 1,2 | | | | | | | |
| $g_2 = 0,\ g_6 = 0.$ | $t_{26} = 0$ | 2 | | | | | | | |
| $g_3 = 0,\ g_4 = 0.$ | $t_{27} = 0$ | 1 | | | | | | | |
| $g_3 = 0,\ g_5 = 0.$ | $t_{28} = 0$ | 2 | | | | | | | |

Die Zahlen der 3. Columne geben den singulären Punkt an, durch welchen die Grundstrahlen bezw. Doppeltangenten gehen.

× bedeutet wahre Doppeltangente.

Tabelle III.

## Die Doppeltangenten der Kurve $F_{1,0} = 0$.

| Grundstrahlen: | Bedingung: | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g_1 = 0$ | $a_1 = 0.$ | 2 | | | | | | |
| $g_2 = 0$ | | | × | | | | | |
| $g_3 = 0$ | | 2 | | | | | | |
| $g_4 = 0$ | | | × | | | | | |
| $g_5 = 0$ | | 2 | | | | | | |
| $g_6 = 0$ | | | × | | | | | |
| $g_7 = 0$ | | | × | | | | | |
| **Grundstrahlenpaare:** | **Entsprech. Doppeltangente:** | | | | | | | |
| $g_2 = 0, g_3 = 0.$ | $t_8 = 0.$ | | × | | | | | |
| $g_3 = 0, g_1 = 0.$ | $t_9 = 0.$ | 2 | | | | | | |
| $g_1 = 0, g_2 = 0.$ | $t_{10} = 0.$ | | × | | | | | |
| $g_1 = 0, g_4 = 0.$ | $t_{11} = 0.$ | | × | | | | | |
| $g_2 = 0, g_5 = 0.$ | $t_{12} = 0.$ | | × | | | | | |
| $g_3 = 0, g_6 = 0.$ | $t_{13} = 0.$ | | × | | | | | |
| $g_4 = 0, g_5 = 0.$ | $t_{14} = 0.$ | | × | | | | | |
| $g_5 = 0, g_6 = 0.$ | $t_{15} = 0.$ | | × | | | | | |
| $g_6 = 0, g_4 = 0.$ | $t_{16} = 0.$ | 2 | | | | | | |
| $g_3 = 0, g_7 = 0.$ | $t_{17} = 0.$ | | × | | | | | |
| $g_1 = 0, g_7 = 0.$ | $t_{18} = 0.$ | | × | | | | | |
| $g_2 = 0, g_7 = 0.$ | $t_{19} = 0.$ | 2 | | | | | | |
| $g_4 = 0, g_7 = 0.$ | $t_{20} = 0.$ | 2 | | | | | | |
| $g_5 = 0, g_7 = 0.$ | $t_{21} = 0.$ | | × | | | | | |
| $g_6 = 0, g_7 = 0.$ | $t_{22} = 0.$ | 2 | | | | | | |
| $g_1 = 0, g_5 = 0.$ | $t_{23} = 0.$ | 2 | | | | | | |
| $g_1 = 0, g_6 = 0.$ | $t_{24} = 0.$ | | × | | | | | |
| $g_2 = 0, g_4 = 0.$ | $t_{25} = 0.$ | 2 | | | | | | |
| $g_2 = 0, g_6 = 0.$ | $t_{26} = 0.$ | 2 | | | | | | |
| $g_3 = 0, g_4 = 0.$ | $t_{27} = 0.$ | | × | | | | | |
| $g_3 = 0, g_5 = 0.$ | $t_{28} = 0.$ | 2 | | | | | | |

Die Zahlen der 3. Columne geben den singulären Punkt an, durch welchen die Grundstrahl bezw. Doppeltangenten gehen.

× bedeutet wahre Doppeltangente.

Tabelle IV.

## Die Doppeltangenten der Kurve $F_{0,3} = 0$.

| Grundstrahlen: | | Bedingungen: |
|---|---|---|
| $x_1 = 0.$ | $g_1$ | $a_1=0; b_2=0; c_3=0; a_3=0; b_1=0; c_2=0$ |
| $x_2 = 0.$ | $g_2$ | |
| $x_3 = 0.$ | $g_3$ | Abkürzungen: |
| $a_2\ x_2 = 0.$ | $g_4$ | $A_1 = a_2\ c_1$ |
| $b_3\ x_3 = 0.$ | $g_5$ | $B_1 = b_3\ a_2$ |
| $c_1\ x_1 = 0.$ | $g_6$ | $C_1 = c_1\ b_3$ |
| $a_2\ c_1\ x_1 + b_3\ a_2\ x_2 + c_1\ b_3 x_3 = 0.$ | $g_7$ | |

| Grundstrahlenpaare: | | Entsprechende Doppeltangenten: |
|---|---|---|
| $x_2 = 0;\ x_3 = 0.$ | $t_8$ | $a_2\ x_2 = 0$ |
| $x_3 = 0;\ x_1 = 0.$ | $t_9$ | $b_3\ x_3 = 0.$ |
| $x_1 = 0;\ x_2 = 0.$ | $t_{10}$ | $c_1\ x_1 = 0.$ |
| $x_1 = 0;\ a_2\ x_2 = 0.$ | $t_{11}$ | $a_2\ c_1\ x_1 = 0.$ |
| $x_2 = 0;\ b_3\ x_3 = 0.$ | $t_{12}$ | $b_3\ a_2\ x_2 = 0.$ |
| $x_3 = 0;\ c_1\ x_1 = 0.$ | $t_{13}$ | $c_1\ b_3\ x_3 = 0.$ |
| $a_2\ x_2 = 0;\ b_3\ x_3 = 0.$ | $t_{14}$ | $b_3\ a_2^2\ x_2 = 0.$ |
| $b_3\ x_3 = 0;\ c_1\ x_1 = 0.$ | $t_{15}$ | $c_1\ b_3^2\ x_3 = 0.$ |
| $c_1\ x_1 = 0;\ a_2\ x_2 = 0.$ | $t_{16}$ | $a_2\ c_1^2\ x_1 = 0.$ |
| $x_3=0;\ a_2c_1x_1+b_3a_2x_2+c_1b_3x_3=0.$ | $t_{17}$ | $b_3\ a_2^2\ x_2 = 0.$ |
| $x_1=0;\ a_2c_1x_1+b_3a_2x_2+c_1b_3x_3=0.$ | $t_{18}$ | $c_1\ b_3^2\ x_3 = 0.$ |
| $x_2=0;\ a_2c_1x_1+b_3a_2x_2+c_1b_3x_3=0.$ | $t_{19}$ | $a_2\ c_1^2\ x_1 = 0.$ |
| $a_2x_2=0;\ a_2c_1x_1+b_3a_2x_2+c_1b_3x_3=0.$ | $t_{20}$ | $x_1 = 0.$ |
| $b_3x_3=0;\ a_2c_1x_1+b_3a_2x_2+c_1b_3x_3=0.$ | $t_{21}$ | $x_2 = 0.$ |
| $c_1x_1=0;\ a_2c_1x_1+b_3a_2x_2+c_1b_3x_3=0.$ | $t_{22}$ | $x_3 = 0.$ |
| $x_1 = 0;\ b_3\ x_3 = 0.$ | $t_{23}$ | $x_3 = 0.$ |
| $x_1 = 0;\ c_1\ x_1 = 0.$ | $t_{24}$ | $x_2 = 0.$ |
| $x_2 = 0;\ a_2\ x_2 = 0.$ | $t_{25}$ | $x_3 = 0.$ |
| $x_2 = 0;\ c_1\ x_1 = 0.$ | $t_{26}$ | $x_1 = 0.$ |
| $x_3 = 0;\ a_2\ x_2 = 0.$ | $t_{27}$ | $x_2 = 0.$ |
| $x_3 = 0;\ b_3\ x_3 = 0.$ | $t_{28}$ | $x_1 = 0.$ |

Tabelle V.

## Die Doppeltangenten der Kurve $F_{1,2} = 0$.

| Grundstrahlen: | | Bedingungen: |
|---|---|---|
| $x_1 = 0$. | $g_1$ | $a_1 = 0; b_2 = 0; c_3 = 0; b_1 = 0; c_2 = 0$. |
| $x_2 = 0$. | $g_2$ | |
| $x_3 = 0$. | $g_3$ | **Abkürzungen:** |
| $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$. | $g_4$ | $A_2 = a_2 (c_1 - a_3)$ |
| $b_3 x_3 = 0$. | $g_5$ | $B_2 = b_3 a_2$ |
| $c_1 x_1 = 0$. | $g_6$ | $C_2 = c_1 b_3$ |
| $A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3 = 0$. | $g_7$ | |

| Grundstrahlenpaare: | | Entsprechende Doppeltangente: |
|---|---|---|
| $x_2 = 0; x_3 = 0$. | $t_8$ | $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$. |
| $x_3 = 0; x_1 = 0$. | $t_9$ | $b_3 x_3 = 0$. |
| $x_1 = 0; x_2 = 0$. | $t_{10}$ | $c_1 x_1 = 0$. |
| $x_1 = 0; a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$. | $t_{11}$ | $A_2 x_1 + a_3 b_3 x_3 = 0$. |
| $x_2 = 0; b_3 x_3 = 0$. | $t_{12}$ | $B_2 x_2 + b_3 a_3 x_3 = a_2 x_2 - a_3 x_3 = 0$. |
| $x_3 = 0; c_1 x_1 = 0$. | $t_{13}$ | $C x = 0$. |
| $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0; b_3 x_3 = 0$. | $t_{14}$ | $B_2 a_2 x_2 = 0$. |
| $b_3 x_3 = 0; c_1 x_1 = 0$. | $t_{15}$ | $C_2 b_3 x_3 = 0$. |
| $c_1 x_1 = 0; a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$. | $t_{16}$ | $C_2 a_3 x_3 + A_2 c_1 x_1 = A_2 x_1 + a_3 b_3 x = 0$. |
| $x_3 = 0; A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3 = 0$. | $t_{17}$ | $B_2 a_2 x_2 = 0$. |
| $x_1 = 0; A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3 = 0$. | $t_{18}$ | $C_3 b_3 x_3 = 0$. |
| $x_2 = 0; A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3 = 0$. | $t_{19}$ | $C_2 a_3 x_3 + A_2 c_1 x_1 = A_2 x_1 + a_3 b_3 x_3 = 0$. |
| $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0; A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3 = 0$. | $t_{20}$ | $x_1 = 0$. |
| $b_3 x_1 = 0; A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3 = 0$. | $t_{21}$ | $x_2 = 0$. |
| $c_3 x_1 = 0; A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3 = 0$. | $t_{22}$ | $x_3 = 0$. |
| $x_1 = 0; b_3 x_3 = 0$. | $t_{23}$ | $x_3 = 0$. |
| $x_1 = 0; c_1 x_1 = 0$. | $t_{24}$ | $x_2 = 0$. |
| $x_2 = 0; a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$. | $t_{25}$ | $x_3 = 0$. |
| $x_2 = 0; c_1 x_1 = 0$. | $t_{26}$ | $x_1 = 0$. |
| $x_3 = 0; a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$. | $t_{27}$ | $x_2 = 0$. |
| $x_3 = 0; b_3 x_3 = 0$. | $t_{28}$ | $x_1 = 0$. |

Tabelle VI.

## Die Doppeltangenten der Kurve $F_{2,1} = 0$.

| Grundstrahlen: | | Bedingungen: |
|---|---|---|
| $x_1 = 0.$ | $g_1$ | $a_1 = 0;\ b_2 = 0;\ c_3 = 0;\ b_1 = 0.$ |
| $x_2 = 0.$ | $g_2$ | |
| $x_3 = 0.$ | $g_3$ | Abkürzungen: |
| $a_2\ x_2 + a_3\ x_3 = 0.$ | $g_4$ | $A_3 \equiv a_2\ (c_1 - a_3)$ |
| $b_3\ x_3 = 0.$ | $g_5$ | $B_3 \equiv b_3\ a_2$ |
| $c_1\ x_1 + c_2\ x_2 = 0.$ | $g_6$ | $C_3 \equiv c_2\ a_3 + c_1\ (b_3 - c_2) \equiv C.$ |
| $A_3\ x_1 + B_3\ x_1 + C_3\ x_3 = 0.$ | $g_7$ | |

| Grundstrahlenpaare: | | Entsprechende Doppeltangente: |
|---|---|---|
| $x_2 = 0;\ x_3 = 0.$ | $t_8$ | $a_2\ x_2 + a_3\ x_3 = 0.$ |
| $x_3 = 0;\ x_1 = 0.$ | $t_9$ | $b_3\ x_3 = 0.$ |
| $x_1 = 0;\ x_2 = 0.$ | $t_{10}$ | $c_1\ x_1 + c_2\ x_2 = 0.$ |
| $x_1 = 0;\ a_2\ x_2 + a_3\ x_3 = 0.$ | $t_{11}$ | $A_3\ x_1 + a_2\ c_2\ x_2 + a_3\ b_3\ x_3 = 0.$ |
| $x_2 = 0;\ b_3\ x_3 = 0.$ | $t_{12}$ | $B_3 x_2 + b_3 a_3 x_3 = a_2 x_2 + c_2 x_3 = 0.$ |
| $x_3 = 0;\ c_1\ x_1 + c_2\ x_2 = 0.$ | $t_{13}$ | $C_3\ x_3 + c_2\ a_2\ x_2 = 0.$ |
| $a_2\ x_2 + a_3\ x_3 = 0;\ b_3\ x_3 = 0.$ | $t_{14}$ | $B_3\ a_2\ x_2 = 0.$ |
| $b_3\ x_3 = 0;\ c_1\ x_1 + c_2\ x_2 = 0.$ | $t_{15}$ | $B_3 c_2 x_2 + C_3 b_3 x_3 = a_2 c_2 x_2 + C_3 x_3 = 0$ |
| $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0;\ a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$ | $t_{16}$ | $C_3\ a_3\ x_3 + A_3\ c_1\ x_1 = 0.$ |
| $x_3 = 0;\ A_3 x_1 + B_3 x_2 + C_3 x_3 = 0.$ | $t_{17}$ | $B_3\ a_2\ x_2 = 0.$ |
| $x_1 = 0;\ A_3 x_1 + B_3 x_2 + C_3 x_3 = 0.$ | $t_{18}$ | $B_3 c_2 x_2 + C_3 b_3 x_3 = a_2 c_2 x_2 + C_3 x_3 = 0.$ |
| $x_2 = 0\ \ A_3 x_1 + B_3 x + C_3 x_3 = 0.$ | $t_{19}$ | $C_3\ a_3\ x_3 + A_3\ c_1\ x_1 = 0.$ |
| $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0;\ A_3 x_1 + B_3 x_2 + C_3 x = 0.$ | $t_{20}$ | $x_1 = 0.$ |
| $b_3\ x_3 = 0;\ A_3\ x_1 + B_3\ x_2 + C_3\ x_3 = 0.$ | $t_{21}$ | $x_2 = 0.$ |
| $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0;\ A_3 x_1 + B_3 x_2 + C_3 x_3 = 0$ | $t_{22}$ | $x_3 = 0.$ |
| $x_1 = 0;\ b_3\ x_3 = 0.$ | $t_{23}$ | $x_3 = 0.$ |
| $x_1 = 0;\ c_1\ x_1 + c_2\ x_2 = 0.$ | $t_{24}$ | $x_2 = 0.$ |
| $x_2 = 0;\ a_2\ x_2 + a_3\ x_3 = 0.$ | $t_{25}$ | $x_3 = 0.$ |
| $x_2 = 0;\ c_1\ x_1 + c_2\ x_2 = 0.$ | $t_{26}$ | $x_1 = 0.$ |
| $x_3 = 0;\ a_2\ x_2 + a_3\ x_3 = 0.$ | $t_{27}$ | $x_2 = 0.$ |
| $x_3 = 0;\ b_3\ x_3 = 0.$ | $t_{28}$ | $x_1 = 0.$ |

Tabelle VII.

## Die Systemgruppen.

| Gruppe g. |
|---|
| 12345678 |
| 45,123678 |
| 23,145678 |
| 1678,2345 |
| 67,123458 |
| 1238,4567 |
| 1458,2367 |
| 18,234567 |

| Gruppe a. | Gruppe b. | Gruppe c. |
|---|---|---|
| 1245,3678 | 1234,5678 | 1236,4578 |
| 1345,2678 | 1235,4678 | 1237,4568 |
| 12,345678 | 14,235678 | 68,123457 |
| 13,245678 | 15,234678 | 78,123456 |
| 2458,1367 | 48,123467 | 2368,1457 |
| 3458,1267 | 58,123567 | 2378,1455 |
| 28,134567 | 2348,1567 | 16,234578 |
| 38,124567 | 2358,1467 | 17,234568 |

| Gruppe bc. | Gruppe ac. | Gruppe ab. |
|---|---|---|
| 46,123578 | 26,134578 | 24,135678 |
| 56,123478 | 36,124578 | 34,125678 |
| 47,123568 | 27,134568 | 25,134678 |
| 57,123468 | 37,124568 | 35,124678 |
| 2346,1578 | 2456,1378 | 2467,1358 |
| 2356,1478 | 3456,1278 | 3467,1258 |
| 2347,1568 | 2457,1368 | 2567,1348 |
| 2357,1468 | 3457,1268 | 3567,1148 |

| Gruppe abc. |
|---|
| 1246,3578 |
| 1346,2578 |
| 1256,3478 |
| 1356,2478 |
| 1247,3568 |
| 1347,2568 |
| 1257,3468 |
| 1357,2468 |

## Lebenslauf.

Nach Absolvierung des K. Maximilians-Gymnasiums zu München studierte ich an der K. Universität München zunächst Staatswissenschaften, dann Mathematik und Naturwissenschaften. Ich legte die beiden Lehramtsprüfungen für Mathematik und Physik ab und absolvierte den pädagogisch-didaktischen Seminarkursus am Theresien-Gymnasium München. Hierauf war ich Assistent der K. Landwirtschaftlichen Kreiswinterschule Erding und bin jetzt Lehrer für Mathematik und Naturwissenschaften an der Realschule Schloss Brohleck zu Brohl a. Rh.

Julius Scheckenbach.